

Лінійні діофантові рівняння

Серед лінійних рівнянь примітне і почесне місце займають рівняння з цілими коефіцієнтами, для яких необхідно відшукати цілі розв'язки. Такі рівняння (і не тільки лінійні) зазвичай називають діофантовими на честь давньогрецького математика Діофанта. Такими рівняннями (а якщо точніше – то задачами, що зводяться до рішення діофантових рівнянь) цікавились не тільки в стародавній Греції, а і в Китаї, Індії, середньовічній Європі. В сучасній практиці також можуть зустрітись ситуації, що зводяться до рішення лінійних діофантових рівнянь.

Розглянемо детальніше лінійні діофантові рівняння з двома невідомими, тобто рівняння виду

$$ax + by = c, \quad (1)$$

якщо a, b, c – цілі числа ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$) для яких необхідно відшукати цілі розв'язки, тобто пари чисел $(x; y)$ з цілими x і y . Такі рівняння можуть мати розв'язки, а можуть і не мати. Так, рівняння $6x + 9y = 8$ не має цілих розв'язків, бо при будь-яких цілих x і y ліва частина ділиться на 3, а права – число 8 – не ділиться.

В загальному випадку, якщо $d = \text{НСД}(a, b)$ і c не ділиться на d , то рівняння (1) розв'язку не має. Якщо ж і c ділиться на d , тобто $a = a_1 d, b = b_1 d, c = c_1 d$, то скоротивши обидві частини (1) на d , отримаємо рівняння з цілими коефіцієнтами

$$a_1 x + b_1 y = c_1,$$

рівносильне даному. В зв'язку з цим можна вважати, що в рівнянні (1) $\text{НСД}(a, b) = 1$.

Найпростіше розв'язувати діофантові рівняння $x + by = c$ ($ax + y = c$). Адже достатньо взяти любе ціле значення y , позначимо його через y_0 , і тоді $x_0 = c - by_0$ разом з y_0 створюють пару цілих чисел, що є розв'язками рівняння $x + by = c$. Отже, пара чисел виду $(c - by_0, y_0, y_0 \in \mathbb{Z})$, утворюють нескінченну множину розв'язків даного рівняння. Та все одно залишається відкритим питання: чи всі розв'язки отримані? Відповідь так! Адже якщо (x_1, y_1) – будь-який цілий розв'язок рівняння, тобто $x_1 + by_1 = c$ – правильна рівність, то $x_1 = c - by_1$, тобто цей розв'язок може мати вигляд $(c - by_1, y_1), y_1 \in \mathbb{Z}$.

Для рівняння $ax + y = c$ розмірковуємо аналогічно.

А далі використаємо це для розв'язку довільного діофантового рівняння

$$ax + by = c,$$

де a, b – взаємно прості числа, зведемо до рівняння, де один із коефіцієнтів при невідомих дорівнює 1.

Отже, нехай існує розв'язок $(x; y)$ даного рівняння і нехай a – менший по модулю із коефіцієнтів при невідомих (звичайно, можна вважати, що a – додатне число). Розділивши з остачею b на a і c на a , запишемо ці числа у вигляді: $b = aq_1 + r_1, c = aq_2 + r_2$, де r_1, r_2 невід'ємні і менші за a числа.

Оскільки $x = \frac{c - by}{a} = \frac{aq_2 + r_2 - y(aq_1 + r_1)}{a} = q_2 - q_1 y + \frac{-r_1 y + r_2}{a}$ – ціле, то $\frac{-r_1 y + r_2}{a} = t$ – цілий розв'язок даного рівняння зведено, по суті, до розв'язку діофантового рівняння $-r_1 y + r_2 = at, 1 \leq r_1 < a$. До цього рівняння застосуємо аналогічний прийом, в результаті якого отримаємо діофантове рівняння з ще меншими по модулю коефіцієнтами при невідомих.

Розглянемо декілька прикладів, щоб практично опанувати цей спосіб.

Приклад 1. Щоб застелити поли в сховищі довжиною 7 м є дошки шириною 11 см і 15 см, відповідної довжини по ширині сховища. Скільки треба взяти дощок тієї та іншої ширини, щоб економно закрити підлогу.

Зрозуміло, що задача зводиться до розв'язку рівняння $11x + 15y = 700$, де x – кількість дощок шириною 11 см, а y – кількість дощок шириною 15 см, причому, x і y – цілі (навіть натуральні) числа. Якщо рівняння має розв'язки, то

$x = \frac{700-15y}{11} = \frac{63 \cdot 11 + 7 - 11y - 4y}{11} = 63 - y + \frac{7-4y}{11}$. При цілих x і $63-y$, $t = \frac{7-4y}{11}$ – ціле. Звідси $11t+4y=7$, або $y = \frac{7-11t}{4} = 2-3t - \frac{1-t}{4}$, $\frac{1-t}{4} = u - \text{ціле}$, $1-t=4u$ або $t=1-4u$, де u – ціле.

Таким чином, $y=2-3t-u=2-3(1-4u)-u=-1+11u$ і $x=63-y+t=63-(-1+11u)+(1-4u)=65-15u$, де u – ціле число.

Розберемось в тому, що ми довели. А саме, якщо рівняння має розв'язки, то вони належать множині пар чисел $(65-15u; -1+11u)$, $u \in \mathbb{Z}$. Виникають природні питання: чи всі ці пари задовольняють рівняння? А може лише деякі з них? А може й нема таких? Для відповіді на них скористаємось безпосередньою перевіркою.

$$11(65-15u)+15(-1+11u)=715-11 \cdot 15u-15+15 \cdot 11u=700.$$

Таким чином, всі пари $(65-15u; -1+11u)$ при любых цілих і тільки вони є розв'язком даного рівняння.

Тепер проаналізуємо конкретні випадки та визначимось з остаточною розв'язками. Отже при $u=0$ ми отримали в якості розв'язку пару $(65; -1)$, або $x=65$, $y=-1$. Але (-1) дошки в нашій задачі не має змісту, так як і $11x$, і $15y$ повинні знаходитись в проміжку від 0 до 700. Розв'язки, що нам підійдуть отримуємо при $u=1$ тобто $(40; 100)$, при $u=2$ - $(35; 21)$, $u=3$ - $(20; 32)$ і при $u=4$ - $(5; 43)$

Приклад 2. Знайти всі натуральні числа, що при діленні на 19 дають остачу 2, а при діленні на 17 – остачу 3.

Якщо x – шукане число, то що воно ділиться на 19 і дає остачу 2 можна записати так: $x=19 \cdot y+2$, де y – неповна частка від ділення. Аналогічно, $x=17 \cdot z+3$, де z – неповна частка від ділення з остачею числа x на 17. Звідси $19 \cdot y+2=17 \cdot z+3$ або $19y-17z=1$. Припустимо, що розв'язки рівняння є цілі числа, отримаємо: $x = \frac{19y-1}{17} = y + \frac{2y-1}{17}y + t$, де $t = \frac{2y-1}{17}$ – ціле. Звідси $2y-1=17t$, $y = \frac{17t+1}{2} = 8t + \frac{t+1}{2} = 8t + u$, $t+1=2u$, $t=2u-1$, u – ціле. Тоді $y=8t+u=8(2u-1)+u=17u-8$, $z=y+t=17u-8+2u-1=19u-9$, u – ціле.

Перевірка показує, що всі пари $(17u-8; 19u-9)$, $u \in \mathbb{Z}$, задовольняють дане рівняння. Насправді, $19(17u-8)-17(19u-9)=-152+153=1$.

Значення для шуканого числа x можна отримати, наприклад, із виразу $x=19y+2$: $x=19(17u-8)=323u-152$. Додатні цілі значення x , а саме про такі й ідеться в умові задачі, будемо мати при $323u-152>0$, $u>\frac{152}{323}$. На кінець маємо: $323 \cdot u - 152$, $u=1, 2, 3, \dots$

Розглянутий метод розв'язку лінійних діофантових рівнянь з двома невідомими без великих змін переносимо на рівняння з більшим числом невідомих.

Так, розв'язком рівняння $x+by+cz=d$ є всі трійки виду $(d-by-cz; y; z)$, де y, z – довільні цілі числа, а якщо в рівнянні $ax+by+cz=d$ всі коефіцієнти при невідомих відмінні від 1 (допускаємо, звичайно, що вони всі не нульові), то вибираємо серед них найменший по модулю – хай для визначеності це буде a – розглянемо $x = \frac{d-by-cz}{a}$ і робимо, виділивши цілі вирази, так, як ми це робили для рівняння з двома невідомими з метою отримання рівняння з коефіцієнтом 1 біля невідомого. Розглянемо до даного матеріалу приклад.

Приклад 3. Розв'язати діофантове рівняння $3x+5y-8z=17$.

Нехай дане рівняння має розв'язок $x = \frac{17-5y+8z}{3} = 5 - 2y + 2z + \frac{2+y+2z}{3}$. Тоді $\frac{2+y+2z}{3} = t$ – ціле і $y+2z-3t=-2$. Розв'язком останнього рівняння можна подати у вигляді: $y=-2-2z+3t$, z і t – довільні цілі. Звідси $x=5-2y+2z+t=5-2 \cdot (-2-2z+3t)+2z+t=9+6z-5t$.

Таким чином, якщо розв'язки даного рівняння існують, то вони складаються із трійок виду $(9+6z-5t; -2-2z+3t; z)$,
(2)
де z і t – деякі цілі числа.

Робимо перевірку щоб упевнитись, що всі трійки чисел, отриманих із рівняння (2) при підстановці замість z і t – цілих значень, є рішеннями рівняння.

Необхідно зауважити, що при розв'язуванні діофантового рівняння $ax + by = c$ ми помічали, що якщо c не ділиться на НСД (a, b) , то рівняння немає розв'язку цілими числами, а якщо c ділиться на НСД (a, b) , то після скорочення рівняння на НСД (a, b) отримаємо рівносильне рівняння, в якому коефіцієнти при невідомих взаємно прості. Виникає питання: в останньому випадку чи обов'язково рівняння матиме розв'язок? В прикладах ми мали саме таку ситуацію і розв'язок знаходився. Відповісти на дане питання в загальному випадку допомагає алгоритм Евкліда для знаходження НСД (a, b) . Адже процес послідовного виділення «цілих частин», запропонованого в методі розв'язку діофантових рівнянь, приводить до зменшення по модулю коефіцієнтів допоміжних рівнянь; що є залишками в алгоритмі Евкліда. А так як останній не дорівнює нулю залишок є НСД (a, b) і дорівнює 1, то обов'язково ми приходимо до допоміжного рівняння з коефіцієнтом 1 біля деякого невідомого, а отже це рівняння, а звідси і початкове обов'язково має розв'язок.

В літературі можна відшукати і інші способи розв'язування діофантових рівнянь.

Задачі.

- 1¹. Скількома способами можна заплатити 29 гривень купюрами по дві та п'ять гривень.
- 2². Чи має розв'язок діофантове рівняння $6x + 18y = 15$.
- 3². Сума двох натуральних чисел дорівнює 168 і кожне з них ділиться на 24. Скільки пар чисел є розв'язками задачі.
- 4². Знайти цілі розв'язки рівняння
а) $8x - 13y = 63$; б) $26x + 34y = 13$; в) $39x - 22y = 10$; г) $17x + 13y + 8z = 89$.
- 5¹. Знайти два додатні цілі числа, сума яких дорівнює 100 і одне із них ділиться на 7, а друге – на 11.
- 6². Знайти всі числа, які при діленні на 23 дають остачу 3, а при діленні на 29 – остачу 5.
- 7³. Знайти число, яке при діленні на 3 дає остачу 2, а при діленні на 5 дає остачу 3, при діленні на 7 – остачу 2.
- 8³. Знайти всі точки координатної площини з цілими координатами, що лежать на прямій АВ, $A(-2; 1)$, $B(7; 2)$. Скільки з них лежать на відрізку АВ?
- 9¹. Для перевезення рідини використовуються ємності 60л і 80л. Скільки було ємностей того та іншого об'ємів, якщо перевезли 440л рідини?
- 10². Знайти всі дроби з знаменниками 11 і 17, відповідно, такі, що їх сума дорівнює $\frac{97}{187}$.
- 11². Маємо три контейнера по 130кг і 160кг. Необхідно повністю загрузити ними вантажівку вантажопід'ємністю 3 тони. Як можна це зробити (вказати всі випадки)?
- 12². Знайти рік народження тих людей, яким в 1967 році виповнилось стільки років, яка сума цифр в році їх народження.
- 13². (задача Леонардо Пізанського) Купили 30 птахів за 30 монет, за кожних 3 горобці заплатили 1 монету, за кожні 2 горлиці – теж 1 монету, а за кожного голуба – по 2 монети. Скільки було птахів кожного виду?

Література.

- *Башмакова І. Г.* Діофант и діофантові рівняння. - М.: Наука, 1972 (Репринт М.: ЛКИ, 2007) (книга одного автора)
- *Сліпенко А. К.* Лінійні рівняння і системи лінійних рівнянь. - Донецьк, 2009. – 32 с. (книга одного автора)
- *Диофант Александрийский.* Арифметика и книга о многоугольных числах. Пер. И. Н. Веселовского; ред. и комм. И. Г. Башмаковой. М.: Наука (ГРФМЛ), 1974. 328 стр. (книга двох авторів)
- *З. І. Борович , І. Р. Шафаревич,* Теорія чисел. М., «Наука», 1964. (книга двох авторів)