Chapitre D4
Triangles et proportionnalité

Aperçu historique

Thalès s'est notamment rendu célèbre en déterminant la hauteur de la pyramide de Khéops. Pour cela, il a remarqué, qu'à une certaine heure de la journée, l'ombre d'un bâton mesurait exactement la longueur du bâton. Il a donc fait mesurer l'ombre de la pyramide à ce moment-là pour connaître la hauteur de la pyramide.

I. Énoncé du théorème

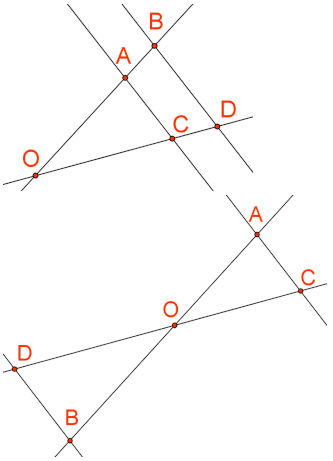
Théorème

Soit O, A, B, C et D des points du plan tels que :

- Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en O ;
- (AC)//(BD).

Sous ces hypothèses, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$$



Remarque

Il n'est pas nécessaire de mettre forcément la plus petite longueur au numérateur. Cependant, si on met la plus grande pour un quotient, il faudra faire de même pour les autres quotients.

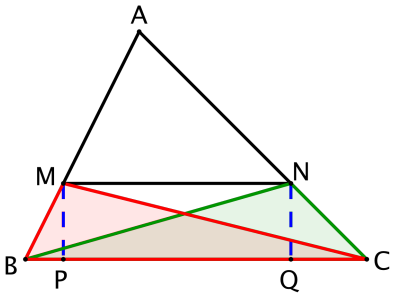
La première hypothèse peut aussi être notée "**les points O, A, B et O, C, D sont alignés**" ou "$O \in (AB)$ **et** $O \in (CD)$".

Preuve d'Euclide par la méthode des aires

Thalès a découvert le théorème, mais c'est Euclide qui l'a prouvé. Les triangles MBC et NBC ont le côté [BC] en commun. Les hauteurs MP et NQ relatives au côté [BC] sont égales. On en déduit que ces deux triangles ont la même aire.

$$A_{MBC} = A_{NBC}$$

$$A_{AMC} = A_{ABC} - A_{MBC} = A_{ABC} - A_{NBC} = A_{ABN}$$



En divisant les deux termes de cette égalité par l'aire du triangle ABC, on obtient :

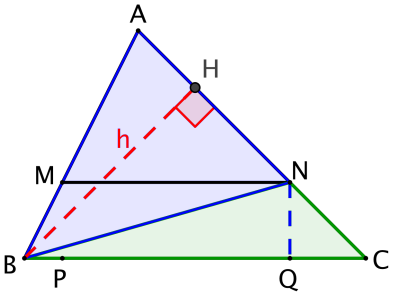
$$\frac{A_{AMC}}{A_{ABC}} = \frac{A_{ABN}}{A_{ABC}}$$

Soit $h' = CI$ la hauteur des triangles AMC et ABC issue de C.

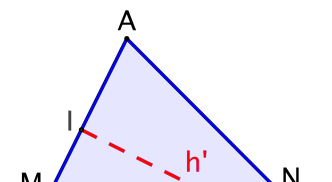
$A_{AMC} = AM \times \frac{h'}{2}$ et $A_{ABC} = AB \times \frac{h'}{2}$

Soit $h = BH$ la hauteur des triangles ABN et ABC issue de B.

$A_{ABN} = AN \times \frac{h}{2}$ et $A_{ABC} = AC \times \frac{h}{2}$



Les rapports des aires égalent :

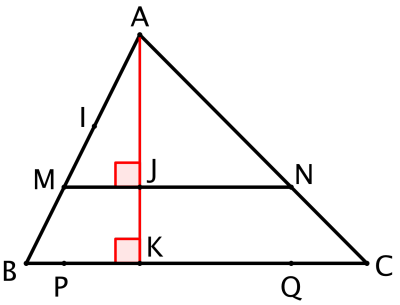


$\frac{A_{AMC}}{A_{ABC}} = \frac{AM \times \frac{h}{2}}{AB \times \frac{h}{2}} = \frac{AM}{AB}$ $\frac{A_{ABN}}{A_{ABC}} = \frac{AN \times \frac{h}{2}}{AC \times \frac{h}{2}} = \frac{AN}{AC}$

Donc

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Calcul de $\frac{MN}{BC}$



Soit [AK] la hauteur de ABC issue du point A : elle coupe (MN) en J. Dans les triangles rectangles ABK et AKC, la propriété précédente permet d'écrire :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AJ}{AK} = \frac{AN}{AC}$$

Les triangles JNK et JNC ont la même aire car ils possèdent le côté [JN] en commun et les hauteurs issues de C et et de K sont égales à JK. On en déduit que :

$$A_{JNK} = A_{JNC}$$

$$A_{AKN} = A_{AJN} + A_{JNK} = A_{AJN} + A_{JNC} = A_{AJC}$$

Or

$A_{AKN} = \frac{1}{2} AK \times JN$ $A_{AJC} = \frac{1}{2} AJ \times KC$

Donc

$$AK \times JN = AJ \times KC$$

$$\frac{AJ}{AK} = \frac{JN}{KC}$$

On montre de la même façon que :

$$\frac{AJ}{AK} = \frac{MJ}{BK}$$

Donc

$\frac{AJ}{AH} = \frac{MJ}{BK} = \frac{JN}{KC} = \frac{MJ+JN}{BK+KC} = \frac{MN}{BC}$

On peut donc conclure :

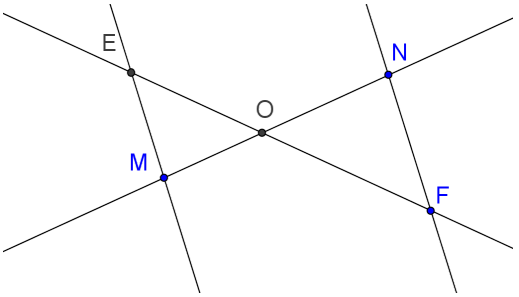
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AJ}{AK} = \frac{MN}{BC}$$

On peut trouver une animation de cette démonstration sur le site de Thérèse EVEILLEAU :
http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/thales.html

Exemple type brevet

Soit deux droites (EF) et (MN) sécantes en O tels que $(EM)//(NF)$.

Sachant que $OE = 3cm$, $OF = 4cm$, $OM = 5cm$ et $NF = 3,6cm$, calcule ON et EM.



Solution (rédaction type brevet)

Dans les triangles OME et ONF, on sait que :

- Les points O, E, F et O, M, N sont alignés ;
- (EM)//(NF)

On peut donc appliquer le théorème de Thalès :

$\frac{OE}{OF} = \frac{OM}{ON} = \frac{EM}{NF}\ \frac{3}{4} = \frac{5}{ON} = \frac{EM}{3,6}$

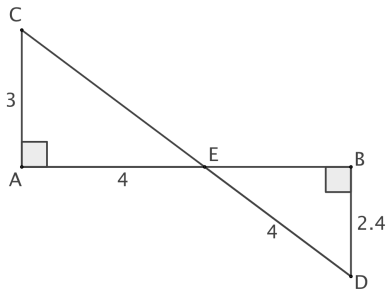
$ON = \frac{4\times5}{3} = \frac{20}{3}\ cm$

$EM = \frac{3,6\times3}{4} = 2,7\ cm$

Remarque

Sauf si une valeur arrondie est expressément demandée, on laissera le résultat sous forme d'une fraction irréductible si le résultat n'est pas décimal.

Exercice type brevet



Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en E et vérifient :

$AC = 3cm, BD = 2,4cm, AE = 4\ cm$ et $ED = 4cm$.

1. Montrer que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

2. Calcule EB et EC.

Solution

1. Je sais que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires à la droite (AB).

Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc, $(AC)//(BD)$.

2.Dans les triangles EAC et EBD, on sait que :

- Les points A, E, B et C, E, D sont alignés ;
- $(AC)//(BD)$.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{EA}{EB} = \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{4}{EB} = \frac{EC}{4} = \frac{3}{2,4}$$

$$EC = \frac{4\times3}{2,4} = 5\ cm$$

$$EB = \frac{4\times2,4}{3} = 3,2\ cm$$

II. Réciproque et contraposée de Thalès

1. Rappels

Une **proposition** est une implication entre deux événements A et B (B étant la conséquence de A). On note cette implication $A \Rightarrow B$ (« A implique B »). Lorsque la proposition est vérifiée, on parle de **propriété** ou de théorème.

En mathématiques, A est l'hypothèse et B la conclusion.

Exemple 1

Si un quadrilatère est un carré (↳événement A), *alors il possède 4 angles droits* (↳événement B)

La **réciproque** d'un théorème $A \Rightarrow B$ est l'implication $B \Rightarrow A$.

Exemple 2

Si un quadrilatère possède 4 angles droits (événement B), *alors c'est un carré* (événement A)

Remarque

Si une proposition est vraie, la réciproque ne l'est pas forcément (c'est le cas ici).

L'événement contraire de l'événement A se note $\overline{A}$ et se lit « **A barre** ».

Exemple 3

L'événement contraire de « le quadrilatère est un carré » est « le quadrilatère n'est pas un carré ».

La **contraposée** du théorème $A \Rightarrow B$ est l'implication $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Exemple 4

Si un quadrilatère ne possède pas 4 angles droits (événement contraire de B), *alors ce n'est pas un carré* (événen

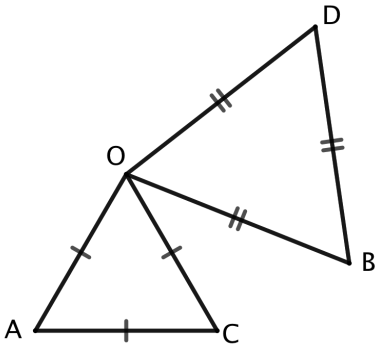
Remarque

Si une proposition est vraie, sa contraposée est forcément vraie.

2. Théorème réciproque de Thalès

La réciproque du théorème de Thalès donne :

« Soit O, A, B, C et D des points du plan. Si $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$ alors Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en O et les droites (AC) et (BD) sont parallèles. »



Malheureusement, cette réciproque est **fausse**. Il suffit d'observer la figure ci-contre pour s'en convaincre. Sur cette figure, les rapports $\frac{OA}{OB}$, $\frac{OC}{OD}$ et $\frac{AC}{BD}$ sont bien égaux mais aucune hypothèse du théorème de Thalès n'est satisfaite. Malgré tout, le théorème suivant permet de montrer, dans certains cas, que deux droites sont parallèles.

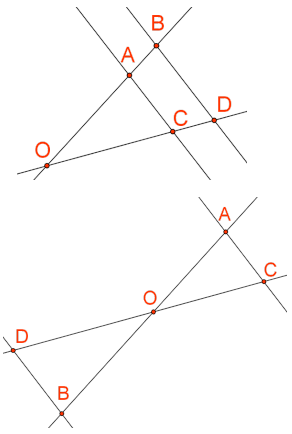
Théorème réciproque de Thalès

Soit O, A, B, C et D des points du plan tels que :

- Les points O, A, B et O, C, D sont alignés **dans le même ordre** ;
- L'égalité suivante est vérifiée :

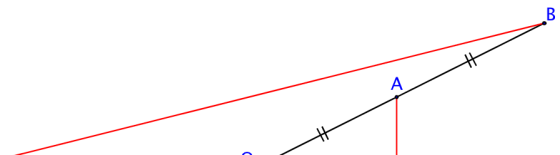
$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$

Sous ces hypothèses, les droites (AC) et (BD) sont parallèles.



Remarque

- Dire que les points O, A, B et O, C, D sont alignés dans le même ordre veut dire que la place du point O sur la droite (AB) par rapport à A et B est la même que celle du point O sur la droite (CD) par rapport à C et D.
- L'hypothèse « dans le même ordre » est essentielle.

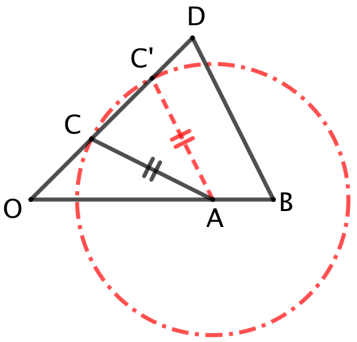


Dans la figure ci-contre, les points O, A, B et O, C, D sont alignés (pas dans le même ordre) et :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{1}{2}$$

Mais les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

- Cette version du théorème ne fonctionne pas avec le dernier rapport.



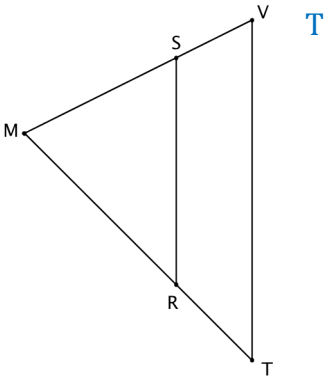
On peut avoir des points alignés dans le même ordre, les rapports $\frac{OA}{OB}$ et $\frac{AC}{BD}$ égaux sans que les droites (AC) et (BD) ne soient parallèles comme le montre la figure ci-contre. En effet, en supposant que les droites (AC') et (BD) soient parallèles, on peut affirmer que, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AC'}{BD} = \frac{OA}{OB}$$

Les points O, A, B et O, C, D sont alignés dans le même ordre mais les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

Exemple (rédaction type)

$MR = 4\ cm$, $MT = 6\ cm$, $MS = 3,6\ cm$, $MV = 5,4\ cm$. Les points M, R, T et M, S, V sont alignés.



Les droites (RS) et (TV) sont-elles parallèles ?

Solution

Les points M, R, T et M, S, V sont alignés **dans le même ordre**.

D'une part, $\frac{MR}{MT} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

D'autre part, $\frac{MS}{MV} = \frac{3,6}{5,4} = \frac{36}{54} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Donc, $\frac{MR}{MT} = \frac{MS}{MV}$

D'après le théorème réciproque de Thalès, on peut en déduire que les droites (RS) et (TV) sont parallèles.

Remarque

Pour montrer l'égalité des rapports, on aurait pu aussi rédiger de la manière suivante :

« D'une part, $\frac{MR}{MT} = \frac{4}{6}$

D'autre part, $\frac{MS}{MV} = \frac{3,6}{5,4}$

$4\times5,4 = 21,6$ et $6\times3,6 = 21,6$

Les produits en croix sont égaux donc $\frac{MR}{MT} = \frac{MS}{MV}$ »

3. Contraposée de Thalès

Contraposée de Thalès

Si l'une des égalités suivantes n'est pas vérifiée :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$$

Alors l'une des conditions suivantes n'est pas réalisée :

- Les droites (AC) et (BD) sont parallèles ;
- Les points O, A, B sont alignés ;
- Les points O, C, D sont alignés.

Remarque

Autrement dit, si l'une des égalités de Thalès n'est pas réalisée et si deux des conditions du théorème sont réalisées alors la troisième ne l'est pas. On utilisera souvent la propriété suivante qui en découle.

Théorème contraposé de Thalès

Si les points O, A, B et O, C, D sont **alignés** et si l'une des égalités suivantes **n'est pas vérifiée** :

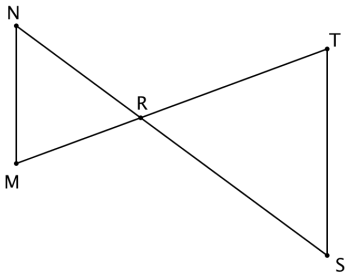
$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$$

Alors les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

Exemple (rédaction type brevet)

$RN = 4\ cm, RS = 6\ cm, RM = 3,6\ cm$ et $RT = 5,1\ cm$.

Les droites (MN) et (TS) sont-elles parallèles ?



Solution

Les points M, R, T et N, R, S sont alignés dans le même ordre.

D'une part, $\frac{RN}{RS} = \frac{4}{6}$

D'autre part, $\frac{RM}{RT} = \frac{3,6}{5,1}$

$4 \times 5,1 = 20,4$ $\quad$ $6 \times 3,6 = 21,6$

Les produits en croix ne sont pas égaux.

Donc

$\frac{RN}{RS} \neq \frac{RM}{RT}$

D'après la contraposée de Thalès, on en déduit que les droites (MN) et (TS) ne sont pas parallèles.

Remarques

- Si l'on utilise la contraposée, préciser « dans le même ordre » est inutile.
- Pour trouver le dénominateur commun de deux fractions entières, on peut utiliser la fonction « PPCM » (plus petit commun multiple) de la calculatrice.

III. Transformations du plan

1. Rappels

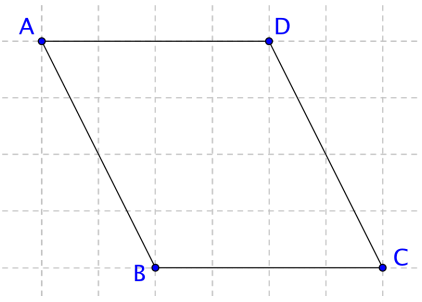
Dans le plan, on peut transformer des figures géométriques sans changer leurs dimensions. Ces transformations sont appelées des **isométries**.

En sixième et en cinquième, on étudie la symétrie par rapport à une droite et par rapport à un point. En quatrième, on étudie les **rotations** et les **translations**. Combinées, ces trois transformations permettent de décrire n'importe quel déplacement dans le plan.

Translation

La **translation** est définie par un déplacement entre deux points du plan.

Par exemple, la translation du point A par la translation qui transforme B en C est le point D.



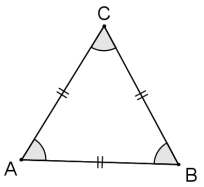
Remarque

ABCD est un parallélogramme.

Pour trouver le translaté, on utilise soit le quadrillage soit le compas.

Rotation

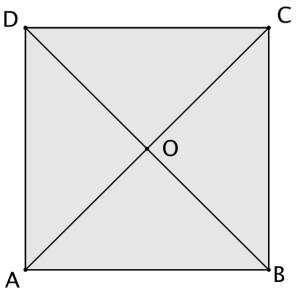
La **rotation** autour d'un point peut se faire dans le **sens direct** (inverse des aiguilles d'une montre) ou dans le **sens indirect** (sens des aiguilles d'une montre). La distance entre le centre de rotation et le point de départ **égale** la distance entre le centre de rotation et le point d'arrivée.



Dans ce triangle équilatéral, on peut définir la rotation de centre A, d'angle 60° et dans le sens direct. Par cette rotation, le point C est l'image du point B. En effet, $AB = AC$ et $B\hat{A}C = 60°$.

Par cette rotation, le point A est sa propre image.

2ème exemple : le cas du carré



On trace un carré ABCD de centre O.

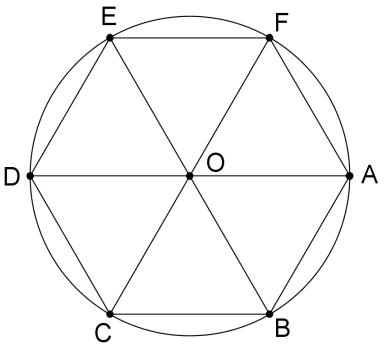
Dans ce carré, on peut définir plusieurs rotations :

- La rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens direct : elle transforme A en B, B en C, C en D et D en A ;
- La rotation de centre O et d'angle 180° dans le sens direct : elle transforme A en C, B en D, C en A et D en B.

Remarque

Cette dernière rotation correspond à la symétrie de centre O. Pour cette rotation, aller dans le sens direct ou indirect ne change rien.

3ème exemple : le cas du cercle



On considère la rotation de centre O d'angle 120° dans le sens indirect.

L'image du point A est le point C.

L'image du segment [BC] est le segment [DE].

L'image de l'hexagone ABCDEF est l'hexagone ABCDEF

L'image du cercle est lui-même.

2. Les homothéties

Une **homothétie** est une **transformation** géométrique qui est caractérisée par son **centre** et un **coefficient** k qui peut être éventuellement négatif.

Si $-1 < k < 1$, il s'agit d'une **réduction**.

Si $k < -1$ ou si $k > 1$, il s'agit d'un **agrandissement**.

Si $k = -1$ ou si $k = 1$, l'image possède les mêmes dimensions que l'image de départ.

Remarque

Dans une homothétie, **les angles sont conservés** (parallélisme, perpendiculaires…) mais pas forcément les longueurs.

Exemple

On veut tracer l'image A' d'un point A par l'homothétie de centre O et de rapport k.

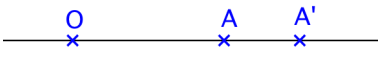
On trace la droite (OA).

Si $k > 0$, on place le point A' sur la **demi-droite [OA)** tel que $OA' = k \cdot OA$.

Si $k < 0$, on place le point A' sur la **demi-droite d'origine O ne contenant pas A** tel que $OA' = -k \cdot OA$.

Remarque

Dans le deuxième cas, le point O est placé entre les points A et A' sur la droite (OA).



cas où $k > 0$



cas où $k < 0$

Remarque

Si $k = -1$, l'homothétie est une **symétrie de centre O**.

Si $k = 0$, l'image de chaque point est le point O.

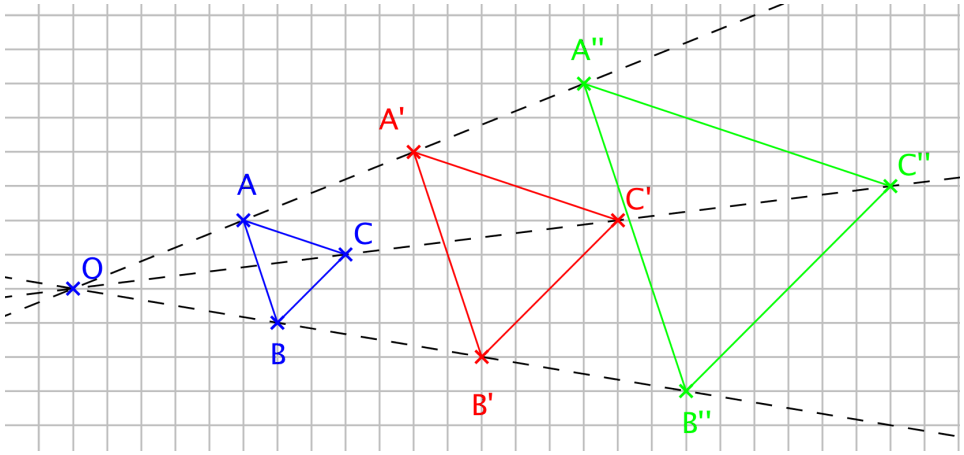
Si $k = 1$, l'homothétie est une **identité** : l'image de chaque point est lui-même.

Si $k = 2$, le point de départ est le milieu du segment dont les extrémités sont le centre de l'homothétie et l'image de ce point. Dans l'exemple ci-dessus, A est le milieu du segment [OA'].

Propriété

L'image d'une droite par une homothétie est une droite **parallèle**.

Exemple Homothétie d'un triangle



Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

Le triangle A''B''C'' est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Remarques

Les dimensions du triangle A'B'C' sont le double de celles du triangle ABC, donc son aire est 4 fois plus grande que celle de ABC.

Les dimensions du triangle A''B''C'' sont le triple de celles du triangle ABC, donc son aire est 9 fois plus grande que celle de ABC.

On remarque aussi que l'on peut appliquer le théorème de Thalès dans cette configuration :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = 2$$

On retrouve le rapport de l'homothétie.

3. Triangles semblables

Deux triangles sont **semblables** si leurs angles sont de même mesure.
Dans l'exemple du paragraphe précédent, les triangles ABC, A'B'C' et A''B''C'' sont des triangles semblables.

Remarque
Si deux triangles sont semblables, l'un est l'image de l'autre par une homothétie dont le centre est l'intersection des droites qui joignent les sommets correspondants, après éventuellement avoir fait une rotation pour que les côtés correspondants soient parallèles.