

УТВЕРЖДАЮ

Начальник управления образования
Могилевского облисполкома

В.В.Рыжков
«___» ноября 2016 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 19 ноября 2016 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 14.00.

VIII класс

1. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \leq x^3 - 5x^2, \\ 7x - 35 \geq x^3 - 5x^2. \end{cases}$$

2. Найдите все пары натуральных чисел m и n таких, что $6^n + 5 \cdot 3^n + 5m \cdot 2^n + 25m - 2016 = 0$.

3. Через точку пересечения биссектрис треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне AC, пересекающая стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка MN, если AM=5 см, CN=3 см.

4. Четыре команды A, B, C, D провели турнир по футболу. Каждая команда сыграла со всеми остальными по одному разу. Места, занятые командами, распределились в следующем порядке: A, B, C, D. При этом количества очков у команд, занявших соседние места, отличаются ровно на 1. Сколько очков набрала каждая команда? Приведите пример такого турнира. В футболе за победу команде начисляется 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.

5. Дан клетчатый квадрат 8×8 . Двое по очереди закрашивают в нем фигурки. Первый закрашивает квадраты из четырех клеток, второй – уголки из трех клеток. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто выиграет при правильной игре?

Пользоваться калькулятором не разрешается

Математика
VIII класс. Решения.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. Решение

Из неравенств системы следует, что $x^2 - 3x - 10 \leq x^3 - 5x^2 \leq 7x - 35$.

Откуда $x^2 - 3x - 10 \leq 7x - 35$.

$$x^2 - 3x - 10 - 7x + 35 \leq 0.$$

$$x^2 - 10x + 25 \leq 0.$$

$$(x - 5)^2 \leq 0.$$

Последнее неравенство верно только когда $x - 5 = 0$, $x = 5$.

Проверкой убеждаемся, что значение $x=5$ удовлетворяет исходной системе.

Ответ: $x = 5$.

2. Решение

Проведем следующие преобразования $3^n(2^n + 5) + 5m(2^n + 5) = 2016$.

$$(2^n + 5)(3^n + 5m) = 2016.$$

Заметим, что $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ и $2^n + 5$ – число нечетное при любом натуральном n , тогда $2^n + 5$ является нечетным делителем числа 2016. Число 2016 имеет следующие нечетные делители: 1, 3, 7, 9, 21 и 63. Рассмотрим следующие случаи:

1) $2^n + 5 = 1$, тогда $2^n = -4$, что невозможно;

2) $2^n + 5 = 3$, тогда $2^n = -2$, что также невозможно;

3) $2^n + 5 = 7$, тогда $2^n = 2$, и $n = 1$. Тогда $3^1 + 5m = 288$, $m = 57$. Получаем пару решений $m=57$, $n=1$.

4) $2^n + 5 = 9$, тогда $2^n = 4$, и $n=2$. Тогда $3^2 + 5m = 224$, $m = 43$. Получаем пару решений: $m=43$, $n=2$.

5) $2^n + 5 = 21$, тогда $2^n = 16$, и $n = 4$. Тогда $3^4 + 5m = 96$, $m = 3$. Получаем пару решений: $m=3$, $n=4$.

6) $2^n + 5 = 63$, тогда $2^n = 58$, что невозможно при натуральных n .

Ответ: $m=57$, $n=1$; $m=43$, $n=2$; $m=3$, $n=4$.

3. Решение.

Пусть биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O.

$\angle MOA = \angle OAC$, как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых MN и AC и секущей AO.

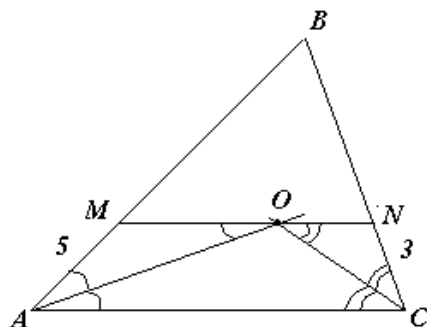
$\angle MAO = \angle OAC$, т.к. AO – биссектриса угла A.

Тогда $\angle MOA = \angle MAO$ и треугольник AMO – равнобедренный с основанием AO и боковыми сторонами AM и MO.

Имеем: $MO = MA = 5$ см. Аналогично получаем, что $NO = NC = 3$ см.

Тогда $MN = MO + ON = 5 + 3 = 8$ (см).

Ответ: 8 см.



4. Решение.

Всего на турнире было сыграно $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ матчей. В каждой игре разыгрывалось 2 очка (если игра закончилась вничью) или 3 очка (если игра завершилась победой одной из команд). Таким образом, сумма очков, набранных командами, находится в пределах от 12 до 18. Пусть команда D набрала n очков, тогда команды C, B, A набрали соответственно $n+1$, $n+2$ и $n+3$ очка. Сумма очков равна $4n+6$.

Эта сумма должна быть больше 12 (все игры не могли закончиться вничью, иначе все команды набрали бы поровну очков), но меньше 18 (если все игры закончились победой одной из команд, то количество очков у каждой команды было бы кратно 3, что противоречит условию).

Имеем: $12 < 4n + 6 < 18$, откуда $1,5 < n < 3$. Т.е. $n = 2$. Итак команды A, B, C, D набрали соответственно 5, 4, 3, 2 очка. Ниже приведен пример такого турнира:

					Очков
A	***	3	1	1	5
B	0	***	1	3	4
C	1	1	***	1	3
D	1	0	1	***	2

5. Решение:

Выиграет второй игрок. После первого хода первого игрока, второй игрок закрашивает один из углов так, чтобы первый не смог закрасить какие-нибудь три угловые клетки квадрата. Несколько возможных вариантов первого хода для второго игрока отмечено на рисунке:

	*	*			*	*	
	*					*	
	*					*	
	*	*			*	*	

Тогда второй игрок всегда сможет сделать последний ход, закрасив уголок, расположенный в одном из углов данного квадрата.

Ответ: Выиграет второй игрок