

Όταν το πλαίσιο αποκτά οριακή ταχύτητα

Το τετράγωνο μεταλλικό πλαίσιο ΑΒΓΔ με πλευρά $\ell=0,4\text{m}$ και αντίσταση $R=0,2\Omega$, ισορροπεί στη θέση που δείχνεται στο σχήμα, με την πάνω πλευρά του ΑΒ στα όρια ενός ομογενούς οριζόντιου μαγνητικού πεδίου έντασης $B=2\text{T}$, κάθετης στο επίπεδο του πλαισίου, με την επίδραση μιας κατακόρυφης δύναμης F , μέτρου $F_0=2\text{N}$. Σε μια στιγμή αυξάνουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης στην τιμή $F=5\text{N}$, με αποτέλεσμα το πλαίσιο να αρχίσει να επιταχύνεται προς τα πάνω, μπαίνοντας στο μαγνητικό πεδίο.

- Να βρείτε την ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο πλαίσιο, σε συνάρτηση με την ταχύτητα του πλαισίου.
- Σε μια στιγμή t_1 το πλαίσιο έχει ταχύτητα $v_1=0,5\text{m/s}$. Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:
 - Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο και η επιτάχυνσή του.
 - Η ισχύς κάθε δύναμης που ασκείται στο πλαίσιο.
 - Η ηλεκτρική ισχύς που εμφανίζεται στο πλαίσιο, καθώς και οι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής ενέργειας, της δυναμικής ενέργειας και της μηχανικής ενέργειας του πλαισίου.
- Να αποδείξετε ότι το πλαίσιο θα αποκτήσει, μετά από λίγο, σταθερή (οριακή) ταχύτητα, την οποία και να υπολογίσετε, με δεδομένο ότι η απόκτηση της οριακής ταχύτητας αποκτάται, πριν την είσοδο της πλευράς ΓΔ στο πεδίο.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

Κατά τη διάρκεια της αρχικής ισορροπίας του πλαισίου, ισχύει $\Sigma F=0$ ή $w=F_0=2\text{N}$. Αν στη συνέχεια, μια στιγμή t το πλαίσιο έχει ανέβει κατά y , όπως στο δεύτερο σχήμα, κινούμενο με ταχύτητα v , τότε λόγω μεταβολής της μαγνητικής ροής αναπτύσσεται πάνω του μια ΗΕΔ λόγω επαγωγής, με αποτέλεσμα το πλαίσιο να διαρρέεται από ρεύμα με φορά από το Α στο Β, αφού μόνο τότε η ασκούμενη από το πεδίο δύναμη Laplace, η F_L , αντιστέκεται στην κίνηση του πλαισίου (στην αιτία εμφάνισης της ΗΕΔ).

- Αν στη τυχαία θέση το πλαίσιο έχει ταχύτητα v , τότε θεωρώντας ότι η κάθετη στο πλαίσιο έχει φορά προς τα έξω (ίδια κατεύθυνση με την ένταση), η ΗΕΔ που αναπτύσσεται πάνω του είναι ίση με:

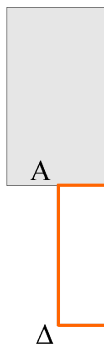
$$E = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(BS)}{dt} = - \frac{B\ell \cdot dy}{dt} = - B\ell \cdot v$$

$$E = -2 \cdot 0,4 \cdot v = -0,8v \quad (\text{μονάδες στο S.I.)}$$

- Για την στιγμή t_1 όπου $v_1=0,5\text{m/s}$, από την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε:

$$E_1 = -0,8v = -0,8 \cdot 0,5 \text{V} = -0,4 \text{V}$$

- Από τον νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα βρίσκουμε ότι τη στιγμή αυτή το πλαίσιο διαρρέεται από ρεύμα έντασης:



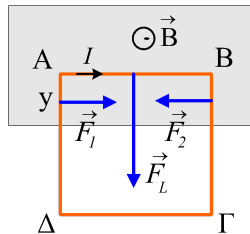
$$I_1 = \frac{E_1}{R} = \frac{-0,4V}{0,2\Omega} = -2A$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο, συνδέεται με τη φορά του ρεύματος (αφού πήραμε την κάθετο στο πλαίσιο με φορά προς τα έξω, η αριστερόστροφη φορά διαγραφής της περιμέτρου του πλαισίου θεωρείται θετική, ενώ το ρεύμα διαρρέει το πλαίσιο δεξιόστροφα).

Τη στιγμή αυτή, κάθε δέχεται δύναμη Laplace,

$$F_l = F_2 = B \cdot I \cdot y$$

Είναι οι δυνάμεις στις και



πλευρά του πλαισίου που βρίσκεται στο πεδίο, όπως στο διπλανό σχήμα, με μέτρο:

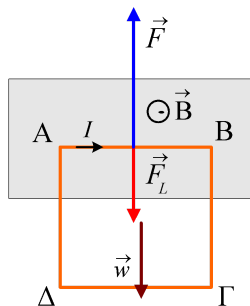
πλευρές ΑΔ και ΒΓ, δυνάμεις οριζόντιες, οπότε $\Sigma F_x = 0$

$$F_L = BI \cdot \ell = 2 \cdot 2 \cdot 0,4N = 1,6N$$

Η δύναμη που ασκείται

Έτσι εφαρμόζοντας τώρα την προς τα πάνω

$$\Sigma F_y = m \cdot a_1 \rightarrow$$



στην πλευρά ΑΒ, κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω, το 2° νόμο του Νεύτωνα για το πλαίσιο, θεωρώντας κατεύθυνση ως θετική, παίρνουμε:

$$F - mg - F_L = m \cdot a_1 \rightarrow$$

$$a_1 = \frac{F - w - F_L}{m} = \frac{(5 - 2 - 1,6)N}{0,2kg} = 7m/s^2$$

β) Για την ισχύ κάθε

δύναμης έχουμε:

$$P_F = |F| \cdot |v_l| \cdot \cos \alpha = |F| \cdot |v_l| = 5 \cdot 0,5W = 2,5W$$

$$P_w = |w| \cdot |v_l| \cdot \cos \alpha = -|w| \cdot |v_l| = -2 \cdot 0,5W = -1W$$

$$P_{FL} = |F_L| \cdot |v_l| \cdot \cos \alpha = -|F_L| \cdot |v_l| = -1,6 \cdot 0,5W = -0,8W$$

Τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα μας λένε ότι μέσω της δύναμης F παρέχεται ενέργεια 2,5J/s στο πλαίσιο, από τα οποία το 1J/s το αφαιρεί το βάρος και τα 0,8 J/s η δύναμη Laplace.

γ) Η ηλεκτρική ισχύς είναι ίση:

$$P_{\eta\lambda} = E_1 \cdot I_1 = (-0,4) \cdot (-2)W = 0,8W$$

(το ίδιο θα βρίσκαμε αν ...ξεχνούσαμε τα πρόσημα και δουλεύαμε με απόλυτες τιμές ΗΕΔ και έντασης)

Για τους ζητούμενους ρυθμούς, θα έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{o\lambda}}{dt} = \frac{d(\Sigma F \cdot dy \cdot \cos \alpha)}{dt} = m a_1 \cdot v_1 = 0,2 \cdot 7 \cdot \frac{0,5J}{s} = 0,7J/s$$

$$\frac{dU}{dt} = - \frac{dW_w}{dt} = - \frac{d(w \cdot dy \cdot \cos \alpha)}{dt} = + w \cdot v_1 = 2 \cdot 0,5 \frac{J}{s} = 1J/s$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{(0,7+1)J}{s} = 1,7J/s$$

Σχόλιο:

Αξίζει να προσέξουμε τι συμβαίνει με τις ενέργειες. Στο πλαίσιο μεταφέρεται ενέργεια μέσω του έργου της ασκούμενης δύναμης F ίση με $2,5 \text{ J/s}$. Από αυτά, τα $0,8 \text{ J/s}$ μετατρέπονται σε ηλεκτρική ενέργεια μέσω του έργου της δύναμης Laplace και τα υπόλοιπα $1,7 \text{ J/s}$ εμφανίζονται ως αύξηση της μηχανικής ενέργειας ($0,7 \text{ J/s}$ αύξηση κινητικής και 1 J/s αύξηση δυναμικής ενέργειας).

iii) Προκειμένου να μελετήσουμε την κίνηση του πλαισίου, εφαρμόζουμε, για μια τυχαία χρονική στιγμή, το 2^ο νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F = m \cdot a \rightarrow F - F_L - w = m \cdot a \rightarrow F - w - B l \ell = m a \rightarrow$$

$$F - w - B l \frac{E}{R} = m a \rightarrow$$

$$F - w - B l \frac{0,8v}{R} = m a$$

Και με αντικατάσταση:

$$3 - 3,2v = 0,2 \cdot a \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι, καθώς επιταχύνεται προς τα πάνω ο αγωγός και η ταχύτητά του αυξάνεται, η επιτάχυνσή του μειώνεται. Έχουμε δηλαδή μια επιταχυνόμενη κίνηση με μειούμενη επιτάχυνση. Αλλά τότε θα φτάσουμε κάποια στιγμή που η επιτάχυνση θα μηδενιστεί (ισοδύναμα όπου $\Sigma F = 0$) και τότε πια ο αγωγός θα κινηθεί ευθύγραμμα και ομαλά με σταθερή ταχύτητα. Θέτοντας λοιπόν $a = 0$ στην εξίσωση (1), παίρνουμε:

$$3 - 3,2 v_{op} = 0 \rightarrow$$

$$v_{op} = \frac{3}{3,2} \frac{m}{s} = \frac{15}{16} \text{ m/s}$$

dmargaris@gmail.com