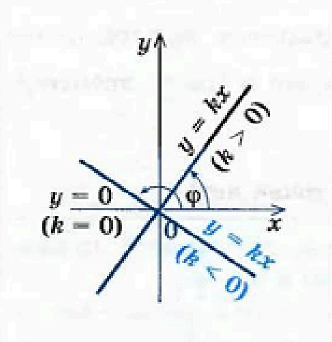
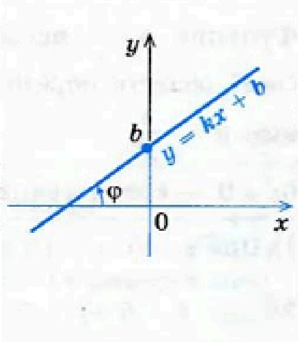
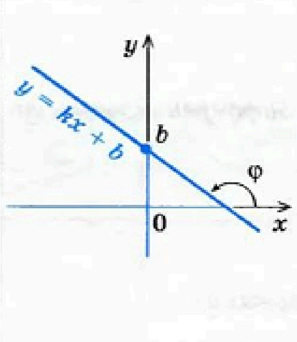
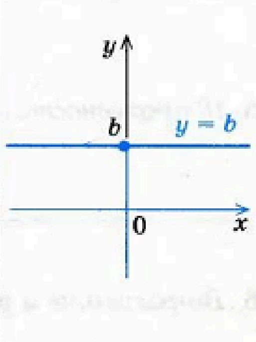
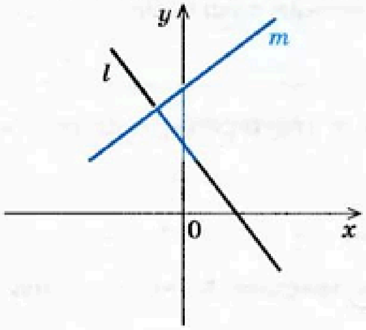
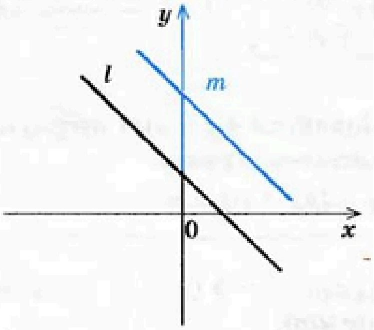
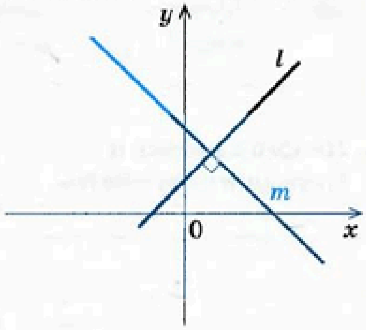
Элементарные функции и их графики

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК	
Определение. ***Линейной функцией*** называют функцию вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа	
Свойства	
1. *Область определения* (D_y)	$x \in \mathbf{R}$ $(D_y = R)$
2. *Множество значений* (E_y)	1) при $k \neq 0$ $E_y = (-\infty; +\infty)$; 2) при $k = 0$ $y = b$
3. *Четность, нечетность*	1) при $k \neq 0$ и $b \neq 0$ — функция ни четная, ни нечетная; 2) при $k = 0$ — четная; 3) при $b = 0$ и $k \neq 0$ — нечетная; 4) при $b = 0$ и $k = 0$ — функция и четная и нечетная

4. *Точки пересечения с осями координат*	$\boxed{\begin{matrix} Ox \\ y=0 \end{matrix}}$ 1) при $k \neq 0$, $x = -\frac{b}{k}$ — точка пересечения с осью Ox; 2) $k = 0$, тогда $y = b$ — прямая, паралельная оси Ox при $b \neq 0$ и совпадающая с осью Ox при $b = 0$ $\boxed{\begin{matrix} Oy \\ x=0 \end{matrix}}$ $y = b$ — точка пересечения с осью Oy
5. *Непрерывность и дифференцируемость*	Линейная функция непрерывна и дифферецируема на всей числовой прямой. $y' = (kx + b)' = k$
6. *Возрастание и убывание*	1) при $k > 0$ ($y' > 0$) функция **возрастает** на всей числовой прямой; 2) при $k < 0$ ($y' < 0$) функция **убывает** на всей числовой прямой; 3) при $k = 0$ ($y' = 0$) функция **постоянная**
7. ***Графиком линейной функции всегда является прямая,*** *тангенс угла наклона которой к оси Ox равен k (угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки)* $\boxed{k \text{ — угловой коэффициент прямой } y = kx + b}$	1) при $b = 0$ ($y = kx$) — прямая, проходящая через начало координат; 2) при $b \neq 0$ ($y = kx + b$) — прямая, не проходящая через начало координат (получается из прямой $y = kx$ параллельным переносом вдоль оси Oy на b единиц)

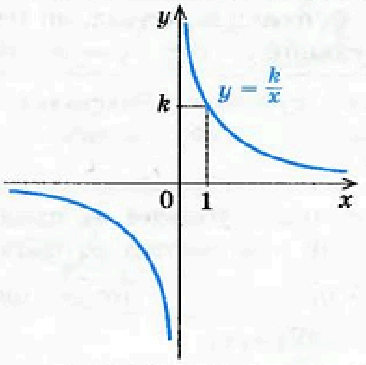
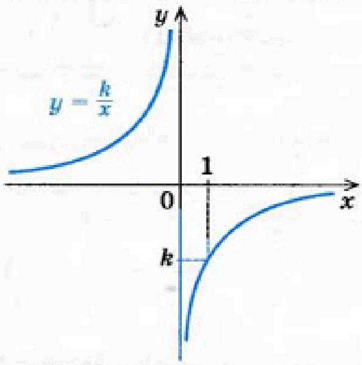
Графики линейных функций

$b = 0$ ($y = kx$)	$b \neq 0$ ($y = kx + b$)		
	$k > 0$	$k < 0$	$k = 0$
$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi}$ 	$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi}$ 	$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi}$ 	$\boxed{k = \operatorname{tg} 0}$ 

Взаимное расположение графиков линейных функций		
Условие пересечения прямых	**Условие параллельности прямых**	**Условие перпендикулярности прямых**
$y = k_1x + b_1$ — прямая l; $y = k_1x + b_1$ — прямая m		
		
Если $k_1 \neq k_2$, то прямые l и m пересекаются в одной точке	$l \parallel m \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$	$l \perp m \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

ФУНКЦИЯ $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ И ЕЕ ГРАФИК

Свойства	
1. *Область определения*	$x \neq 0$ $(D_y = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty))$
2. *Множество значений*	$y \neq 0$ $(E_y = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty))$
3. *Четность, нечетность*	Функция нечетная $\left(f(-x) = \dfrac{k}{-x} = -\dfrac{k}{x} = -f(x)\right)$, ее график симметричен относительно начала координат
4. *Точки пересечения с осями координат*	Поскольку $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то точек пересечения с осями координат нет
5. *Непрерывность и дифференцируемость*	Функция $y = \dfrac{k}{x}$ непрерывна в каждой точке своей области определения и имеет производную $y' = -\dfrac{k}{x^2}$ ($y' \neq 0$ — критических точек нет)
6. *Возрастание и убывание*	1) При $k > 0$ ($y' < 0$) функция убывает на каждом интервале $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$; 2) при $k < 0$ ($y' > 0$) функция возрастает на каждом интервале $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$

<table>
<tr><td>7. Асимптоты (см. табл. 31)</td><td>1) При $x \to \infty$ $y = \frac{k}{x} \to 0$,
т. е. прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота;
2) при $x \to 0$ справа $y = \frac{k}{x} \to \begin{pmatrix} +\infty \text{ при } k > 0 \\ -\infty \text{ при } k < 0 \end{pmatrix}$;
при $x \to 0$ слева $y = \frac{k}{x} \to \begin{pmatrix} -\infty \text{ при } k > 0 \\ +\infty \text{ при } k < 0 \end{pmatrix}$,
т. е. $x = 0$ — вертикальная асимптота</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. График функции $y = \frac{k}{x}$ — кривая, состоящая из двух ветвей (симметричная относительно начала координат), которую называют гиперболой (при $k > 0$ ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях, при $k < 0$ — во II и IV координатных четвертях)</td></tr>
<tr><td>$k > 0$</td><td>$k < 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

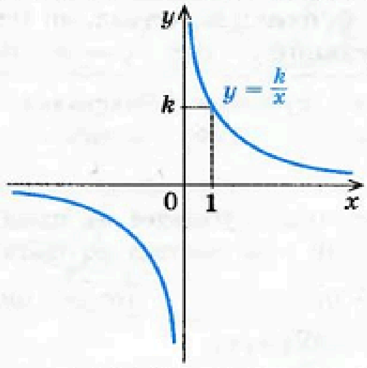
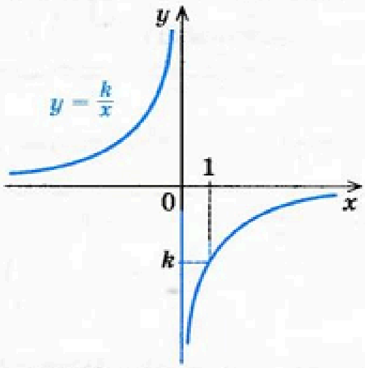
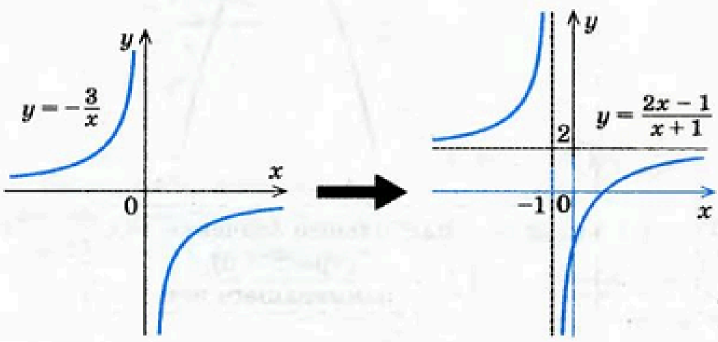
7. *Асимптоты* (см. табл. 31)	1) При $x \to \infty$ $y = \frac{k}{x} \to 0$, т. е. прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота; 2) при $x \to 0$ справа $y = \frac{k}{x} \to \begin{pmatrix} +\infty \text{ при } k > 0 \\ -\infty \text{ при } k < 0 \end{pmatrix}$; при $x \to 0$ слева $y = \frac{k}{x} \to \begin{pmatrix} -\infty \text{ при } k > 0 \\ +\infty \text{ при } k < 0 \end{pmatrix}$, т. е. $x = 0$ — вертикальная асимптота
8. ***График функции*** $y = \frac{k}{x}$ — *кривая, состоящая из двух ветвей (симметричная относительно начала координат), которую* ***называют гиперболой*** *(при $k > 0$ ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях, при $k < 0$ — во II и IV координатных четвертях)*	
$k > 0$	$k < 0$
	

График дробно-линейной функции $\left(y = \frac{ax+b}{cx+d},\ \text{где } c \neq 0\right)$	
Пример	**Способ построения**
Построить график функции $y = \frac{2x-1}{x+1}$. *Решение.* $y = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$, т. е. график данной функции получается **параллельным переносом** графика функции $y = -\frac{3}{x}$ **вдоль оси** Ox на (-1) единицу и вдоль оси Oy на $(+2)$ единицы 	***Выделить целую часть*** *(т. е. записать в виде* $y = m + \frac{k}{x-n}$*)* ***и выполнить параллельный перенос графика*** $y = \frac{k}{x}$ *(вдоль оси Ox на n единиц и вдоль оси Oy на m единиц* — см. табл. 32)

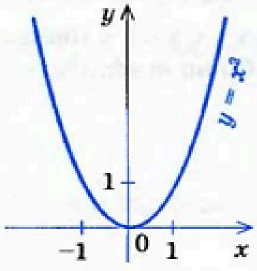
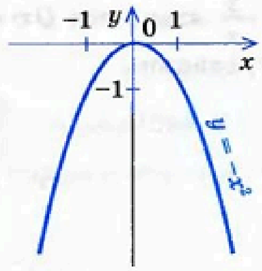
КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Определение. ***Квадратичной функцией*** называют функцию вида
$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0$$

Свойства

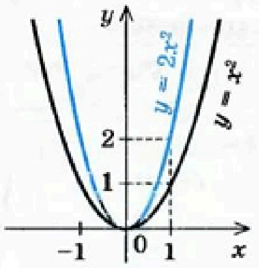
Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) всегда является парабола, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$	Координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = y(x_0) = -\frac{D}{4a}$, где $D = b^2 - 4ac$. Ось симметрии параболы $x = x_0$
1. *Область определения* (D_y)	$x \in R$ ($D_y = R$)
2. *Множество значений* (E_y)	При $a > 0$ $E_y = [y_0; +\infty)$; при $a < 0$ $E_y = (-\infty; y_0]$
3. *Четность, нечетность*	При $b \neq 0$ — функция ни четная, ни нечетная; при $b = 0$ функция $y = ax^2 + c$ — четная
4. *Непрерывность и дифференцируемость*	Квадратичная функция непрерывна и дифферецируема на всей числовой прямой $y' = 2ax + b$
5. *Возрастание и убывание, экстремумы*	При $a > 0$ функция убывает на промежутке $(-\infty; x_0]$ ($y' < 0$) и возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$ ($y' > 0$), $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — точка минимума, $y_0 = y(x_0)$ — минимум. При $a < 0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty; x_0]$ ($y' > 0$) и убывает на промежутке $[x_0; +\infty)$ ($y' < 0$), $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — точка максимума, $y_0 = y(x_0)$ — максимум

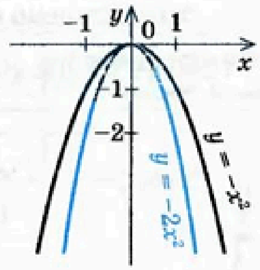
Расположение некоторых графиков квадратичных функций

$a > 0$	$a < 0$
$\boxed{y = x^2}$  Наименьшее значение — 0 (при $x = 0$), наибольшего нет	$\boxed{y = -x^2}$  Наибольшее значение — 0 (при $x = 0$), наименьшего нет

$y = ax^2$

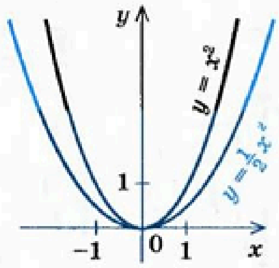
$|a| > 1$

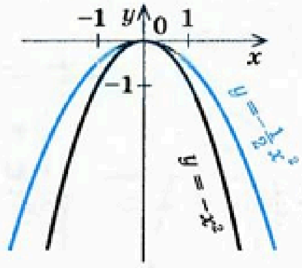




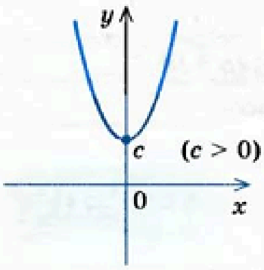
$y = ax^2$

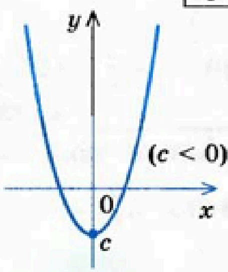
$0 < |a| < 1$

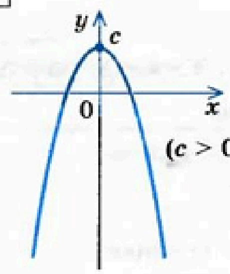


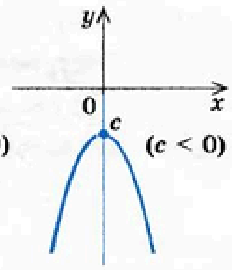


$y = ax^2 + c$







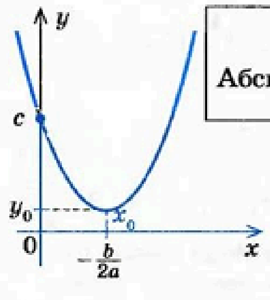


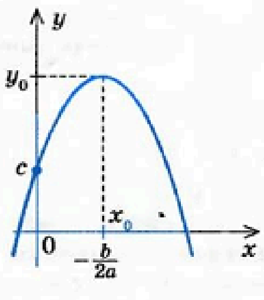
Наименьшее значение равно c (при $x = 0$), наибольшего нет

Наибольшее значение равно c (при $x = 0$), наименьшего нет

$y = ax^2 + bx + c$

Абсцисса вершины — $x_0 = -\frac{b}{2a}$





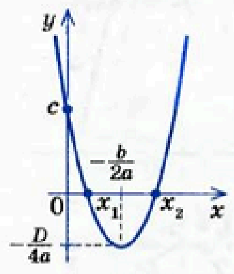
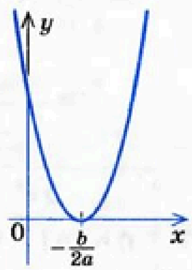
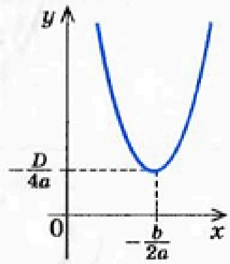
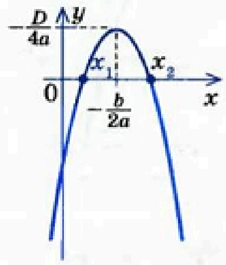
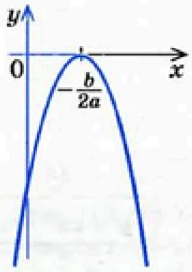
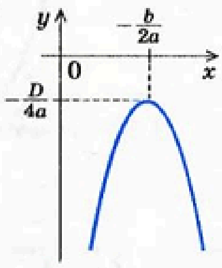
Наименьшее значение y_0 функция принимает в точке x_0, наибольшего значения нет

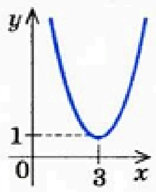
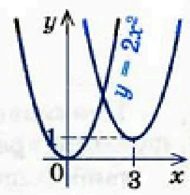
$y_0 = y(x_0) = -\frac{D}{4a}$,

где $D = b^2 - 4ac$

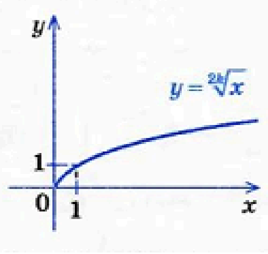
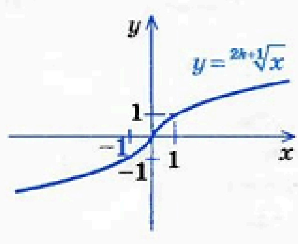
Наибольшее значение y_0 функция принимает в точке x_0, наименьшего значения нет

Парабола пересекает ось Oy в точке c

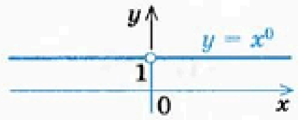
Различные случаи расположения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ относительно оси Ox ($D = b^2 - 4ac$ — дискриминант)		
При $D > 0$ график пересекает ось Ox в двух точках	При $D = 0$ график касается оси Ox	При $D < 0$ график не пересекает ось Ox
$a > 0$ $D > 0$ 	$a > 0$ $D = 0$ 	$a > 0$ $D < 0$ 
$a < 0$ $D > 0$ 	$a < 0$ $D = 0$ 	$a < 0$ $D < 0$ 

Построение эскиза графика функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$	
I способ	**II способ**
1. Вычислить абсциссу вершины $x_0 = -\frac{b}{2a}$. 2. Подставить $x = x_0$ в уравнение и вычислить ординату вершины y_0. 3. Построить эскиз параболы (вида $y = ax^2$) с вершиной в точке $(x_0;\ y_0)$: при $a > 0$ — ветви направлены вверх, при $a < 0$ — ветви направлены вниз	1. Выделить полный квадрат $ax^2+bx+x=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$. 2. Используя элементарные преобразования графиков (табл. 32), **выполнить параллельный перенос параболы ax^2** (вдоль оси Ox на $-\frac{b}{2a}$, вдоль оси Oy на $-\frac{D}{4a}$)
Пример. Построить график функции $y = 2x^2 - 12x + 19$	
Решение 1. $x_0 = -\frac{b}{2a} = 3$. 2. $y_0 = y(x_0) = y(3) = 1$. 3. Строим параболу вида $y = 2x^2$ (ветви направлены вверх, так как $a = 2 > 0$) с вершиной в точке (3; 1) (пересечение с осью Oy в точке $c = 19$) 	*Решение* 1. $y=2x^2-12x+19=2\left(x^2-6x+\frac{19}{2}\right)=2\left(x^2-6x+9-9+\frac{19}{2}\right)=2(x-3)^2+1$. 2. График данной функции получается из графика функции $y = 2x^2$ (парабола, ветви направлены вверх, вершина — в точке (0; 0) — см. выше) параллельным переносом вдоль оси Ox на (+3) единицы и вдоль оси Oy на (+1) единицу.  $y = 2x^2 - 12x + 19 = 2(x-3)^2 + 1$

ФУНКЦИЯ $y=\sqrt[n]{x}$ $(n \geqslant 2,\ n \in N)$ И ЕЕ ГРАФИК

<table>
<tr><td colspan="3">Свойства</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(x)=\sqrt[n]{x}$</td><td>n — четное ($n = 2k$, $k \in N$)</td><td>n — нечетное ($n = 2k + 1$, $k \in N$)</td></tr>
<tr><td>$y=\sqrt[n]{x}=\sqrt[2k]{x}$</td><td>$y=\sqrt[n]{x}=\sqrt[2k+1]{x}$</td></tr>
<tr><td>1. Область определения</td><td>$x \geqslant 0$ $(D_y = [0;\ +\infty))$</td><td>$x \in R$ $(D_y = R)$</td></tr>
<tr><td>2. Множество значений</td><td>$y \geqslant 0$ $(E_y = [0;\ +\infty))$</td><td>$y \in R$ $(E_y = R)$</td></tr>
<tr><td>3. Четность, нечетность</td><td>Ни четная, ни нечетная</td><td>Функция нечетная:
$f(-x)=\sqrt[2k+1]{-x}=-\sqrt[2k+1]{x}=-f(x)$,
и ее график симметричен относительно начала координат</td></tr>
<tr><td>4. Точки пересечения с осями координат</td><td colspan="2">Если $y = 0$, то $\sqrt[n]{x}=0$, т. е. $x = 0$, следовательно,
график проходит через начало координат</td></tr>
<tr><td>5. Непрерывность и дифференцируемость</td><td colspan="2">Функция $y=\sqrt[n]{x}$ непрерывна в каждой точке своей области определения и при $x \neq 0$ имеет производную $y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">6. Возрастание и убывание</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$(0;\ +\infty)$</td></tr><tr><td>y'</td><td>Не существует</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$(-\infty;\ 0)$</td><td>0</td><td>$(0;\ +\infty)$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>Не существует</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>↗</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Учитывая непрерывность функции, получаем, что функция $y=\sqrt[n]{x}$ возрастает на всей области определения</td></tr>
<tr><td>(при $x \in [0;\ +\infty)$)</td><td>(при $x \in R$)</td></tr>
<tr><td>7. Взаимно обратные функции</td><td>$y = x^{2k}$ (при $x \geqslant 0$) и $y=\sqrt[2k]{x}$</td><td>$y = x^{2k+1}$ (при $x \in R$) и $y=\sqrt[2k+1]{x}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Графики симметричны относительно прямой $y = x$ (см. табл. 30)</td></tr>
<tr><td>8. График функции $y=\sqrt[n]{x}$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

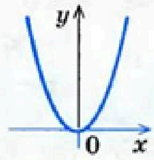
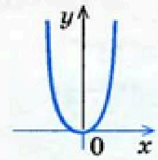
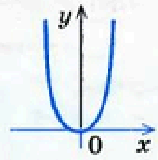
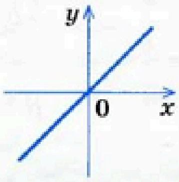
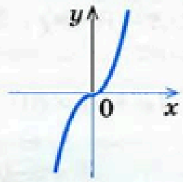
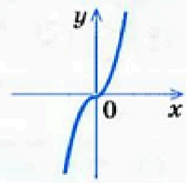
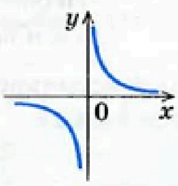
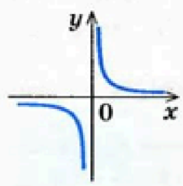
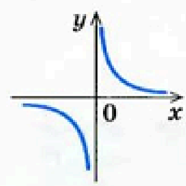
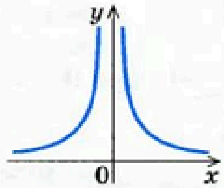
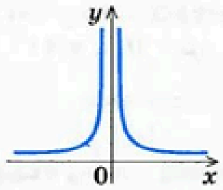
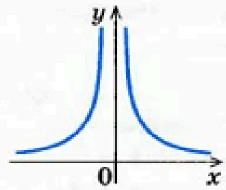
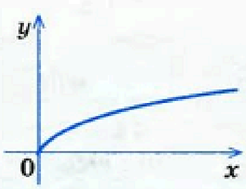
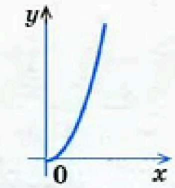
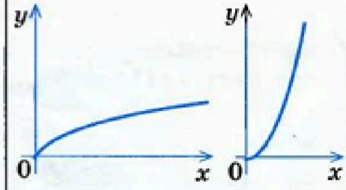
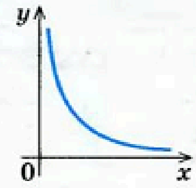
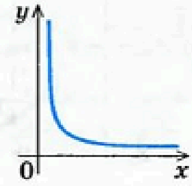
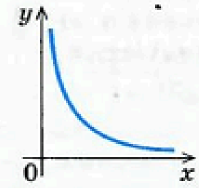
СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Определение	Особый случай ($\alpha = 0$)
Функцию вида $y = x^\alpha$, где α — любое действительное число, называют *степенной функцией*	Если $\alpha = 0$, то $y = x^\alpha = x^0 = 1$ $(x \neq 0)$ 

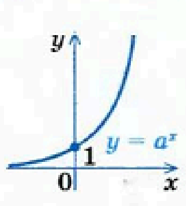
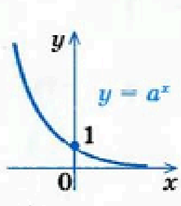
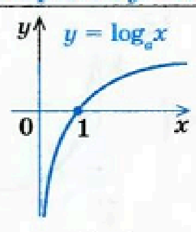
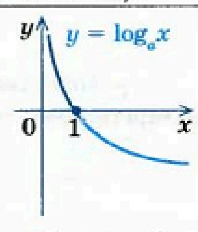
Свойства функции $y = x^\alpha$ (при $\alpha \neq 0$)

$f(x) = x^\alpha$	α — натуральное		α — целое отрицательное		α — нецелое	
	четное	нечетное	четное	нечетное	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
1. *Область определения — D_f*	R		$x \neq 0$		$x \geqslant 0$ $[0; +\infty)$	$x > 0$ $(0; +\infty)$
2. *Множество значений — E_f*	$[0; +\infty)$	R	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
3. *Четность, нечетность*	Четная	Нечетная	Четная	Нечетная	Ни четная, ни нечетная	
4. *Периодичность*	Функция непериодическая					
5. *Пересечение с осями координат*	$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$		Нет		$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$	Нет
6. *Производная*	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$					
7. *Возрастание и убывание*	$(-\infty; 0)$ — убывает, $(0; +\infty)$ — возрастает	Возрастает	$(-\infty; 0)$ — возрастает, $(0; +\infty)$ — убывает	$(-\infty; 0)$ — убывает, $(0; +\infty)$ — убывает	Возрастает	Убывает
8. *Экстремумы*	$\begin{cases} x_{\min} = 0, \\ y_{\min} = 0 \end{cases}$	Нет			$\min\limits_{[0; +\infty)} f(x) = f(0) = 0$	Нет
9. *Асимптоты*	Нет		$x = 0$ и $y = 0$		Нет	$x = 0$ и $y = 0$
10. *Выпуклость и точки перегиба*	$\cup$*	При $\alpha \neq 1$ $(-\infty; 0) \cap$, $(0; +\infty) \cup$, 0 — точка перегиба	$(-\infty; 0) \cup$, $(0; +\infty) \cup$	$(-\infty; 0) \cap$, $(0; +\infty) \cup$	$0 < \alpha < 1 \cap$, $\alpha > 1 \cup$	$\cup$

Графики степенной функции ($y = x^\alpha$)

α — четное натуральное число	$y = x^2$ 	$y = x^4$ 	$y = x^{2n}$, $n \in N$ 
α — нечетное натуральное число	$y = x^1$ 	$y = x^3$ 	$y = x^{2n+1}$, $n \in N$ 
α — нечетное отрицательное число	$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 	$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ 	$y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in N$ 
α — четное отрицательное число	$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ 	$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ 	$y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$, $n \in N$ 
α — нецелое положительное число	$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{\frac{3}{2}}$ 	$y = x^\alpha$ **($\alpha > 0$, α — нецелое)** 
α — нецелое отрицательное число	$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-\frac{3}{2}}$ 	$y = x^\alpha$ **($\alpha < 0$, α — нецелое)** 

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

	Показательная функция		Логарифмическая функция	
	Определение. ***Показательной функцией*** называют функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$		**Определение.** ***Логарифмической функцией*** называют функцию вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$	
Свойства				
1. *Область определения* D_f	$x \in R$ $(D(a^x) = R)$		$x > 0$ $(D(\log_a x) = (0; +\infty))$	
2. *Множество значений* E_f	$y > 0$ $(E(a^x) = (0; +\infty))$		$y \in R$ $(E(\log_a x) = R)$	
3. *Четность, нечетность*	Функция ни четная, ни нечетная			
4. *Пересечение с осями координат*	Пересечения с осью $\boxed{Ox}$ нет ($a^x \neq 0$ при $a > 0$, $a \neq 1$), $\boxed{Oy}$ $x = 0$, $y = a^0 = 1$		$\boxed{Ox}$ $(y = 0)$ $\log_a x = 0$ при $x = a^0 = 1$. Пересечения с осью $\boxed{Oy}$ нет ($x \neq 0$ по области определения)	
5. *Непрерывность и производная*	Функция непрерывна и дифференцируема на всей области определения. $(a^x)' = a^x \ln a$		$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	
	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$
6. *Промежутки знакопостоянства*	Для всех $x \in R$ $y = a^x > 0$ $(a > 0, a \neq 1)$		$y = \log_a x > 0$ при $x > 1$, $y = \log_a x < 0$ при $0 < x < 1$	$y = \log_a x > 0$ при $0 < x < 1$, $y = \log_a x < 0$ при $x > 1$
7. *Возрастание и убывание* (экстремумов нет)	Возрастает	Убывает	Возрастает	Убывает
8. *Асимптоты* (см. табл. 31)	При $x \to -\infty$ $y = a^x \to 0$,	При $x \to +\infty$ $y = a^x \to 0$,	При $x \to 0$ (справа) $y = \log_a x \to -\infty$,	$y = \log_a x \to +\infty$,
	т. е. прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота		т. е. прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота	
	При $x \to +\infty$ $y = a^x \to +\infty$	При $x \to -\infty$ $y = a^x \to +\infty$	При $x \to +\infty$ $y = \log_a x \to +\infty$	При $x \to +\infty$ $y = \log_a x \to -\infty$
Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ — взаимно обратные функции, поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$ (см. табл. 30)				
9. *Графики показательных и логарифмических функций*	 $a > 1$	 $0 < a < 1$	 $a > 1$	 $0 < a < 1$