

З А Д А Н И Я
II этапа (районного, городского)
республиканской олимпиады
по математике
для учащихся 8 – 11 классов
учреждений образования Витебской области
(2012-2013 учебный год)

ВИТЕБСК • 2012

*Республиканская олимпиада по математике
II районный (городской) этап 2012-2013 учебный год*

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
областного оргкомитета
республиканской олимпиады,
первый заместитель начальника
управления образования
Витебского облисполкома

 Л.М.Степанов

30 октября 2012

8 класс

1. Существуют ли натуральные числа x и y такие, что
 $\text{НОД}(x; y) + \text{НОК}(x; y) + x + y = 2011$?
2. Если $8 \cdot 8 = 54$, то чему равно 84 ?
3. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30° . Докажите, что отрезок перпендикуляра, проведенного к гипотенузе через ее середину до пересечения с катетом, вдвое меньше большего катета.
4. В 1748 году великий российский математик Леонард Эйлер опубликовал одно из своих важнейших произведений «Введение в анализ бесконечных». В этом труде, в частности, Эйлер находит значения двух бесконечных сумм $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ и $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots$ (слагаемыми в первой сумме являются числа, обратные квадратам чисел натурального ряда, а во второй – обратные квадратам нечетных чисел натурального ряда). Значение первой суммы, как показал Эйлер, равно $\frac{\pi^2}{6}$. Учитывая этот результат, найдите значение второй суммы.
5. Футбольный мяч шит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскут граничит только с

белыми, а каждый белый – с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

- На выполнение работы отводится 4 часа
- Запрещается пользоваться калькулятором

*Республиканская олимпиада по математике
II районный (городской) этап 2012-2013 учебный год*

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
областного оргкомитета
республиканской олимпиады,
первый заместитель начальника
управления образования
Витебского облисполкома

 Л.М.Степанов

30 октября 2012

9 класс

1. Найдите две обыкновенные дроби — одну со знаменателем 8, другую со знаменателем 13 такие, чтобы они не были равны, но разность между большей и меньшей из них была как можно меньше.
2. В стране Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер обменивают на 10 даллеров, а в Даллии даллер обменивают на 10 диллеров. Начинаящий финансист имеет 1 диллер и может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.
3. Из концов диаметра, равного 25 см, проведены по одну сторону от него две хорды длиной 24 см и 20 см. Определите расстояние между концами хорд, не лежащими на диаметре.
4. Расставьте числа $x = (a + b)(c + d)$, $y = (a + c)(b + d)$, $z = (a + d)(b + c)$ в порядке возрастания, если известно, что $a < b < c < d$.

5. Определите отношение двух чисел, если отношение их среднего арифметического к среднему геометрическому равно $25 : 24$ (среднее геометрическое двух чисел – это квадратный корень из их произведения)

-
- На выполнение работы отводится 4 часа
 - Запрещается пользоваться калькулятором

*Республиканская олимпиада по математике
II районный (городской) этап 2012-2013 учебный год*

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
областного оргкомитета
республиканской олимпиады,
первый заместитель начальника
управления образования
Витебского облисполкома

 Л.М.Степанов

30 октября 2012

10 класс

1. Числа $2 + a$ и $35 - b$ делятся на 11. Докажите, что число $a + b$ делится на 11.
2. Используя тождеств
о
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.

$$a^3 a^3 + b^3 b^3 + c^3 c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 a^2 + b^2 b^2 + c^2 c^2 - ab - ac - bc)$$

найдите общую формулу для решения кубического уравнения

$$x^3 + px + g = 0.$$

3. В трапеции ABCD основания AD и BC, O – точка пересечения диагоналей, площади треугольников AOD и BOC равны соответственно S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции ABCD.
4. Расставьте числа $x = (a + b)(c + d)$, $y = (a + c)(b + d)$, $z = (a + d)(b + c)$ в порядке возрастания, если известно, что $a < b < c < d$.
5. Найдите трехзначное число такое, что число, записанное теми же цифрами в той же последовательности, но в другой системе счисления с основанием, отличным от 10, было вдвое больше исходного числа.

-
- На выполнение работы отводится 4 часа
 - Запрещается пользоваться калькулятором

*Республиканская олимпиада по математике
II районный (городской) этап 2012-2013 учебный год*

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя
областного оргкомитета
республиканской олимпиады,
первый заместитель начальника
управления образования
Витебского облисполкома

 Л.М.Степанов

30 октября 2012

11 класс

1. Числа $2 + a$ и $35 - b$ делятся на 11. Докажите, что число $a + b$ делится на 11.
2. Докажите, что если корнями многочлена $x^2 + px + 1$ являются числа a и b , а корнями многочлена $x^2 + gx + 1$ – числа c и d , то справедливо равенство $(a - c)(b - c)(a + d)(b + d) = g^2 - p^2$.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CH. Верно ли, что биссектрисы углов треугольника DEN лежат на высотах треугольника ABC? Выразите углы треугольника DEN через углы треугольника ABC.

4. Докажите, что для любых положительных a и b верно неравенство

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \geq \frac{5}{2}.$$

5. Найдите трехзначное число такое, что число, записанное теми же цифрами в той же последовательности, но в другой системе счисления с основанием, отличным от 10, было вдвое больше исходного числа.

-
- *На выполнение работы отводится 4 часа*
 - *Запрещается пользоваться калькулятором*