

چرا گشتاور وارد بر اجسام بی حرکت صفر است؟

می دانیم که در مکانیک تحلیلی با تعریف گشتاور به صورت $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ به راحتی ثابت می شود که هنگامی که اندازه حرکت زاویه ای یک جسم صلب با گذشت زمان تغییر نکند ناچاراً گشتاور وارد شده بر آن صفر است. هنگام تدریس موضوع گشتاور به یک دانش آموز دبیرستانی، چون او در سطحی نیست که برهان تحلیلی قضیه ی فوق به او ارائه گردد، بعد از ارائه ی تعریفی مشابه فوق برای گشتاور به هیچ وجه برای او ثابت نمی شود که گشتاور اعمال شده بر یک جسم ساکن صفر است بلکه بیان می شود که باید چنین باشد. به عبارت ساده تر با فرض اینکه میله ی AB نشان داده شده در شکل 1، که در نقطه ی A لولا شده است، بی حرکت است رابطه ی $F_1 \cdot AB = F_2 \cdot AC$ به عنوان یک قضیه ثابت نمی شود بلکه به عنوان یک اصل بدیهی الزامی به دانش آموز عرضه می شود.

قبول این الزام اثبات نشده برای یک دانش آموز کنجکاو و تیزهوش مشکل است و او از خود می پرسد آیا قانونی جدید در مکانیک در حال آشکار شدن است که بیان می کند که گشتاور وارد بر یک جسم بی حرکت باید صفر باشد! بنابراین اثبات قضیه ی فوق به روشی ساده و قابل فهم برای یک دانش آموز تازه کار لازم است. در زیر تلاش می نمایم این کار را صورت دهیم.

فرض کنید درحالی که ریسمان شکل 2 در نقاط A و B به یک تکیه گاه ثابت بسته شده است نیروی F در نقطه ی O بر آن وارد شود که بر اثر آن ریسمان نیروهای F_1 و F_2 را بر تکیه گاه وارد می کند. ریسمان در حال تعادل است بنابراین تکیه گاه نیروهایی برابر با F_1 و F_2 بر ریسمان در جهت های نشان داده شده در شکل 2 وارد می کند. هرکدام از این دو نیروی وارد شده توسط تکیه گاه دارای دو مؤلفه به صورت نشان داده شده در شکل می باشد که بزرگی آنها برابر است با $F'_1 = F_1 \cdot OO'/OA$ ، $F''_1 = F_1 \cdot AO'/OA$ ، $F'_2 = F_2 \cdot OO'/OB$ و $F''_2 = F_2 \cdot BO'/OB$. چون ریسمان حرکت انتقالی افقی (به طرف چپ یا راست) ندارد خواهیم داشت $F''_1 = F''_2$ یا $F_1 \cdot AO'/OA = F_2 \cdot BO'/OB$ که آن را به صورت $(F_1 \cdot OO'/OA) \cdot BO = (F_2 \cdot OO'/OB) \cdot BO$ یا $F'_1 \cdot AO' = F'_2 \cdot BO$ می نویسیم. توجه کنید که به تعریف گشتاور رسیده ایم زیرا $F'_2 = F_2 \cdot OO'/OB$ نیروی عمود وارد بر B و BO بازوی گشتاور نسبت به O، و نیز $F'_1 = F_1 \cdot OO'/OA$ نیروی عمود وارد بر A و AO بازوی گشتاور نسبت به O است، که دیدیم حاصل ضرب دوتای اول برابر است با حاصل ضرب دوتای دوم (که درواقع علت آن نبود هیچ شتاب گردشی است).

حال تصور کنید که زاویه‌های θ_1 و θ_2 در شکل 2 به سمت صفر میل کنند. در این حال چون F_1 و F_2 لازم است برای موازنه با نیروی ثابت F ، دارای مؤلفه‌های عمودی باشند ناگزیر بزرگی مؤلفه‌های افقی آنها (که با هم موازنه می‌شوند) به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. گاملاً واضح است که هیچ جسمی توان تحمل نیروی بی‌نهایت را ندارد و لذا در عمل θ_1 و θ_2 صفر نخواهند شد گرچه می‌توانند خیلی کوچک شوند. اما توجه کنید که حتی اگر فرض کنیم $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ، قانون فوق‌الذکر برای گشتاور همچنان صادق خواهد بود، یعنی برای مورد نشان داده شده در شکل 3 خواهیم داشت $F'_1 \cdot OA = F'_2 \cdot OB$ زیرا به‌وضوح این یک حالت حدی برای پروسه‌ای است که در هر مرحله‌اش قانون گشتاور فوق‌الذکر صادق بوده است.

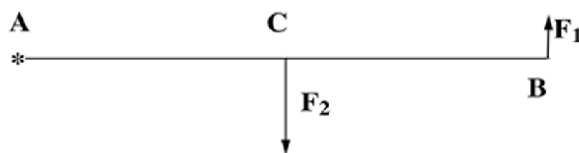


Fig. 1. A stationary bar AB, hinged at A, on which the forces F_1 and F_2 are exerted.

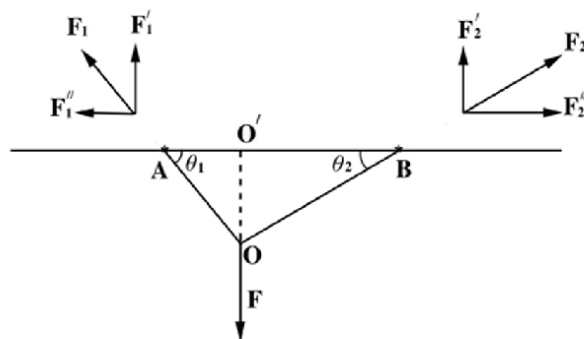


Fig. 2. A string tied to a fixed support.

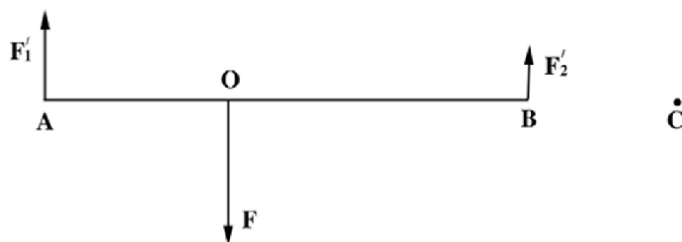


Fig. 3. The string of Fig. 2 when θ_1 and θ_2 have approached zero.