ENGEES 1995 - Option Physique-MathŽmatiques
Epreuve de Physique (4 heures)

Premier exercice

I Equilibre dÕun fil pesant et tendu

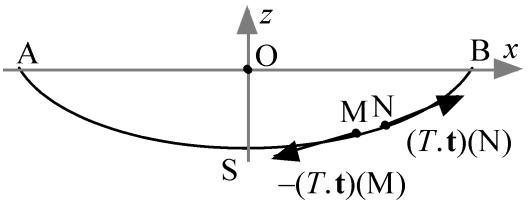
I.1

LÕŽlŽment de fil situŽ entre les points M et N dÕabscisses curvilignes *s* et *s* + d*s* est soumis :

* ˆ son poids, µ.d*s*.**g** ;

* ˆ la tension exercŽe en N par la partie NB, (*T*.**t**)(*s* + d*s*) ;

* ˆ la tension exercŽe en M par la partie AM, Žgale ˆ (Ð*T*.**t**)(*s*) dÕaprs le principe de lÕaction et de la rŽaction.



La condition dÕŽquilibre sÕŽcrit donc (*T*.**t**)(*s* + d*s*) Ð (*T*.**t**)(*s*) + µ.d*s*.**g** = 0, soit

$$d(T.\mathbf{t}) + \mu.ds.\mathbf{g} = 0 \quad (1)$$

I.2

a) Au point M(*x*,*z*), **t** = d*x*/d*s*.**ux** + d*z*/d*s*.**uz**, dÕo

d(*T*.**t**) = d(*T*.d*x*/d*s*).**ux** + d(*T*.d*z*/d*s*).**uz**.

Comme **g** = Ð*g*.**uz**, la projection de (1) sur **ux** et **uz** donne :

$$d(T.dx/ds) = 0 \; ; \; d(T.dz/ds) + \mu g.ds = 0.$$

LÕintŽgration de ces deux Žquations conduit aux relations demandŽes :

$$T.dx/ds = \alpha \; ; \; T.dz/ds = -\mu g s + \beta, \text{ o } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux constantes}$$

(Remarque : la projection sur **uy** permettrait de dŽmontrer que la courbe dŽcrite par le fil est situŽe dans le plan vertical auquel appartiennent A et B)

b) Au point S, *s* = 0, *T* = *T*0, **t** = **ux**, soit d*x*/d*s* = 1 et d*z*/d*s* = 0. En reportant ces valeurs dans les Žquations prŽcŽdentes on obtient :

$$\alpha = T0 \; ; \; \beta = 0,$$
$$T.dx/ds = T0 \; ; \; T.dz/ds = -\mu g s$$

I.3

a) LÕŽquation *T*.d*x*/d*s* = *T*0 entra”ne *T* = *T*0.d*s*/d*x*. On en dŽduit

*T*0.d*s*/d*x*.d*z*/d*s* = *T*0.d*z*/d*x* = µ*g*s, dÕo la relation demandŽe :

*z*Õ(*x*) = *s*/*a*, avec *a* = µ*g*/*T*0

b) La diffŽrentiation de la relation prŽcŽdente donne : d*z*Õ(*x*) = (1/*a*).d*s*. LÕexpression de d*s* est $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx.\sqrt{1 + z'^2(x)}$. Par consŽquent la fonction *z*Õ(*x*) vŽrifie :

$$\frac{dz'(x)}{\sqrt{1 + z'^2(x)}} = d\{\text{argsh}[z'(x)]\} = dx / a$$

soit en intŽgrant : argsh[*z*Õ(*x*)] Ð argsh[*z*Õ(0)] = argsh[*z*Õ(*x*)] = *x*/*a*

car x = 0 correspond au point S pour lequel zÕ = 0.

On en dŽduit lÕexpression : *z*Õ(*x*) = sh(*x*/*a*),

qui sÕintgre en *z*(*x*) = *a* ch(*x*/*a*) + *C*

Le fil passe par A et B de coordonnŽes (±*d*, 0), dÕo en reportant dans lÕexpression de *z*(*x*) :

$$C = -a.\text{ch}(d/a).$$

La fonction z(x) sÕŽcrit donc :

$$z(x) = a\,[\text{ch}(x/a) - \text{ch}(d/a)]$$

I.4

a) De la relation $z'(x) = s/a$ on tire $s = a.z'(x) = a.\mathrm{sh}(x/a)$.
Par consŽquent, $L = s(B) - s(O) = s(d) - s(0) = a.\mathrm{sh}(d/a)$

$$\boxed{L/a = \mathrm{sh}(d/a)}$$

b) Le point S a pour coordonnŽes $(0, h)$, dÕo, en reportant dans lÕexpression de $z(x)$:

$h = a[\mathrm{ch}(d/a) - 1]$. En exprimant $\mathrm{ch}(d/a) = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(d/a)} = \sqrt{1+(L/a)^2}$, on obtient la relation :

$$h = a[\mathrm{ch}(d/a) - 1] = a\left(\sqrt{1+(L/a)^2} - 1\right)$$

c) A partir de lÕŽquation $T.\mathrm{d}x/\mathrm{d}s = T0$ et de lÕexpression $s = a.\mathrm{sh}(x/a)$ on obtient

$$\boxed{T = T0.\mathrm{ch}(x/a)}$$

I.5

a) La section du fil de rayon r vaut πr^2, donc lÕexpression de sa masse linŽique μ en fonction de sa masse volumique ρ est : $\mu = \rho\pi r^2$.
Puisque $T = T0.\mathrm{ch}(x/a)$, la tension est maximale aux points dÕattache A et B du c‰ble, soit $x = \pm d$. Donc $T\mathrm{max} = T0.\mathrm{ch}(d/a) = T_0\sqrt{1+(L/a)^2}$

A.N. : $\mu = 5{,}6$ kg.m^{-1} ; $a = T0/\mu g = 240$ m ;
$d = \mathrm{argsh}(L/a) = 97$ m ; $h = 20$ m
$T\mathrm{max} = 14$ kN : il nÕy a pas risque de rupture.

b) $\mu = 6{,}2.10^{-3}$ kg.m^{-1} ; $a = 7{,}7.10^{4}$ m ; $L/a = 0{,}5/7{,}7.10^{4} = 6{,}5.10^{-6} \ll 1$

$$h = a\left(\sqrt{1+(L/a)^2} - 1\right) \approx L^2/2a$$ = 1,6 µm : le fil est pratiquement rectiligne

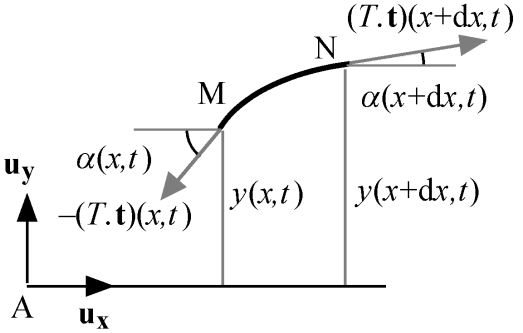
II. Propagation dÕondes dans un fil tendu

II.1
LÕŽlŽment de fil MN, de masse dm, est soumis :

* ˆ son poids (nŽgligŽ dÕaprs lÕŽnoncŽ)

* aux forces de tension dont la rŽsultante est Žgale, dÕaprs I.1, ˆ
$(T.\mathbf{t})(x+\mathrm{d}x, t) - (T.\mathbf{t})(x, t) =$
$\mathrm{d}x.\partial(T.\mathbf{t})(x, t)/\partial x$

On note α lÕangle $(\mathbf{ux}, \mathbf{t})$:
$\mathbf{t}(x, t) = \cos\alpha(x, t).\mathbf{ux} + \sin\alpha(x, t).\mathbf{uy}$.



Les dŽplacements du fil Žtant de faible amplitude, $\tan\alpha(x, t) = (\partial y/\partial x)(x, t) \ll 1$ et $\alpha^2 \ll 1$.
Le principe fondamental de la dynamique appliquŽ ˆ lÕŽlŽment MN sÕŽcrit alors en notant lÕaccŽlŽration du centre de masse, dirigŽe selon **uy**, $a.\mathbf{uy}$:
$a(x, t).\mathrm{d}m.\mathbf{uy} = \mathrm{d}x.\partial(T.\mathbf{t})(x, t)/\partial x$, et en projection sur **ux** et **uy** :

$$\partial(T.\cos\alpha)(x, t)/\partial x = 0 \; ; \; \mathrm{d}x.\partial(T.\sin\alpha)(x,t)/\partial x = a.\mathrm{d}m$$

La premire relation sÕintgre en $(T.\cos\alpha)(x, t) = C(t)$. La pente α est trs faible et les variations de tension dues au dŽplacement du fil par rapport ˆ sa position dÕŽquilibre nŽgligeables donc $C(t)$ est Žgal (ˆ des infiniment petits prs) ˆ la tension du fil ˆ lÕŽquilibre $T0$, soit $T.\cos\alpha = T0$.

En reportant dans la seconde Žquation et en utilisant $\tan\alpha = \partial y/\partial x$ on obtient :

$T0.dx.(\partial\tan\alpha(x, t)/\partial x) = T0.dx.\partial^2 y(x, t)/\partial x^2 = a(x, t).dm$

La longueur MN vaut $dx/\cos\alpha$ et $dm = \mu.dx/\cos\alpha = \mu dx$ ˆ lÕordre dominant car $\alpha << 1$.
Pour un ŽlŽment MN infiniment petit, lÕaccŽlŽration $a(x, t)$ est Žgale ˆ des infiniment petits prs ˆ lÕaccŽlŽration du point M : $d^2 y(x, t)/\partial t^2$.
Par consŽquent lÕŽquation du mouvement sÕŽcrit :

$$\partial^2 y(x, t)/\partial x^2 - (\mu/T0).\partial^2 y(x, t)/\partial t^2 = 0$$

CÕest une **Žquation de DÕAlembert ˆ une dimension** :
$\partial^2 y/\partial x^2 - (1/v^2).\partial^2 y/\partial t^2 = 0$, pour laquelle la cŽlŽritŽ $v = \sqrt{T_0 / \mu}$

II.2
La vitesse de phase des ondes est Žgale ˆ leur cŽlŽritŽ, soit dÕaprs lÕŽquation prŽcŽdente :

$$v\varphi = v = \sqrt{T_0 / \mu}$$

A.N. : $T0 = 4{,}7$ kN ; $\mu = 6{,}2.10^{-3}$ kg.m^{-1} ; $v = 870$ m.s^{-1}

II.3
a) Pour une solution stationnaire $y(x, t) = y0.\cos(k.x + \phi).\cos(\omega.t + \varphi)$, les dŽrivŽes secondes valent $\partial^2 y(x, t)/\partial x^2 = -k^2.y(x, t)$ et $\partial^2 y(x, t)/\partial t^2 = -\omega^2.y(x, t)$. LÕŽquation du mouvement sÕŽcrit alors

$$[(\omega/v)^2 - k^2].y(x, t) = 0.$$

On en dŽduit la relation entre ω, k et v pour toute solution non identiquement nulle :

$$k = \pm\omega/v = \pm\omega\sqrt{\mu / T_0}$$

b) Le fil est fixŽ ˆ ses deux extrŽmitŽs A et B, la fonction $y(x, t)$ vŽrifie par consŽquent les conditions aux limites $y(xA, t) = y(xB, t) = 0$ pour tout t :

$$\cos(k.xA + \phi) = \cos(k.xB + \phi) = 0$$

dÕo
$k.xA + \phi = (2m + 1)\pi/2$ et $k.xB + \phi = (2n + 1)\pi/2$ o m et n sont deux entiers.
En Žliminant ϕ et en introduisant la longueur $2L$ du fil :

$$k.(xB - xA) = k.2L = p\pi \text{ } (p \text{ entier non nul})$$

Les diffŽrents modes de vibration sont caractŽrisŽs par les valeurs de k :

$$kp = p.\pi/2L$$

Les frŽquences associŽes sont donnŽes par :

$$\nu p = \omega p/2\pi = v.kp/2\pi = p.v/4L, \ p \text{ entier naturel}$$

Pour le mode fondamental, $p = 1$, dÕo :

$$\nu 0 = v/4L$$

c) A.N. : $v = 870$ m.s^{-1} ; $2L = 1$ m ; $\nu 0 = 435$ Hz. On calcule ensuite

mode	1	2	3	4	(5)
νn (Hz)	435	870	1305	1740	(2175>2000)

Deuxime exercice

1. Moment dÕinertie

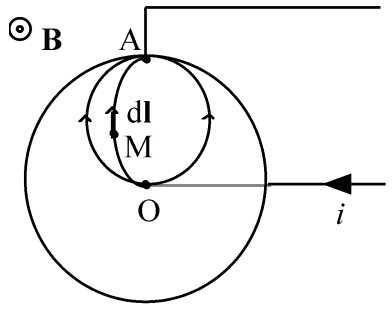
Le moment dÕinertie par rapport ˆ son axe dÕun disque homogne de masse m, de rayon r vaut :
$J = mr^2/2 = \mu(\pi r^2 h)r^2/2 = (\pi/2)\mu r^4 h$ en introduisant la masse volumique μ et lÕŽpaisseur h.
Pour le systme de deux disques coaxiaux ŽtudiŽs, on trouve en utilisant lÕadditivitŽ des moments dÕinertie

$$J\text{Æ} = (\pi/2)(\mu a^4 h + \mu\text{Õ} b^4 h\text{Õ})$$

A.N. : $J\text{Æ} = 8{,}05.10^{\text{Ð}4}$ kg.m^2

2. Moment des forces de Laplace

Remarque : tout au long de cet exercice les phŽnomnes dÕautoinduction sont nŽgligŽs.
On considre une ligne de courant ŽlŽmentaire joignant O et A parcourue par lÕintensitŽ di. La contribution au moment en O des forces de Laplace de la portion infinitŽsimale d**l** de cette ligne de courant centrŽe sur le point M sÕŽcrit



$$d^2\mathbf{M}O = \mathbf{OM}\wedge d^2\mathbf{f}M = \mathbf{OM}\wedge(di.d\mathbf{l}\wedge\mathbf{B}) =$$
$$di[d\mathbf{l}(\mathbf{OM}.\mathbf{B}) \text{Ð } \mathbf{B}(\mathbf{OM}.d\mathbf{l})]$$

OM.**B** = **0** car le champ **B** est perpendiculaire au plan du disque ;
le vecteur d**l** correspond au dŽplacement ŽlŽmentaire le long de la ligne de courant considŽrŽe donc d**l** = d**OM** et **OM**.d**l** = d(OM^2)/2;
par consŽquent $d^2\mathbf{M}O = \text{Ð } di.d(OM^2).\mathbf{B}/2$
LÕintŽgration le long de cette ligne de courant entre O et A (convention dÕorientation de lÕŽnoncŽ pour i) conduit ˆ :

$$d\mathbf{M}_O = -\int_O^A di.d(OM^2).\mathbf{B}/2 = -di.OA^2.\mathbf{B}/2 = -di.a^2.\mathbf{B}/2$$

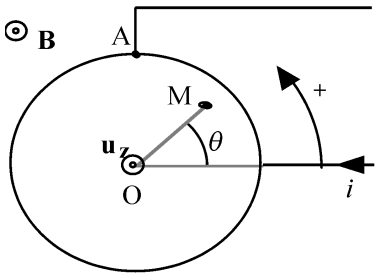
car **B** est uniforme et di se conserve le long dÕune ligne de courant dans le cadre de lÕARQP.
Le facteur $a^2.\mathbf{B}/2$ ne dŽpend pas de la ligne de courant considŽrŽe. LÕintŽgration de la relation prŽcŽdente sur lÕensemble des lignes de courant apparaissant dans le disque est immŽdiate et consuit ˆ lÕexpression du moment total des forces de Laplace en O :

$$\mathbf{M}O = \text{Ð}(ia^2/2).\mathbf{B}$$

3. Champ Žlectromoteur et fŽm induite

On Ždudie un conducteur mobile dans un champ permanent : cas de Lorentz.

a) Au point M, le champ Žlectromoteur sÕŽcrit :



Em = **vM**^**B**, o **vM** est la vitesse du point M par rapport au rŽfŽrentiel dÕŽtude.

vM = **vO** + ½^**OM** = ½^**OM**, car O est situŽ sur lÕaxe de rotation Æ = (O, **uz**).

Em = (½^**OM**)^**B** = **OM**(½.**B**) Ð ½(**OM**.**B**) =

OM(½.**B**)

(**OM** et **B** sont orthogonaux)

DÕaprs le schŽma, ½ = ω.**uz** o $\omega = d\theta/dt$, et **B** = B.**uz** (**B** est colinŽaire ˆ lÕaxe Æ). Donc ½.**B** = ωB et

$$\mathbf{Em} = \omega B.\mathbf{OM}$$

b) Le long dÕune ligne de courant quelconque la fŽm induite a pour expression, compteÐtenu de la convention dÕorientation pour i :

$$e_{OA} = \int_O^A \mathbf{E_m}.d\mathbf{l} = \int_O^A \omega B.(\mathbf{OM}.d\mathbf{OM}) = \omega B.OA^2/2 = \omega B a^2/2$$

Cette expression est indŽpendante de la ligne de courant considŽrŽe.
LÕexpression de la fem induite entre O et A sÕŽcrit :

$$e_{OA} = \omega B a^2/2$$

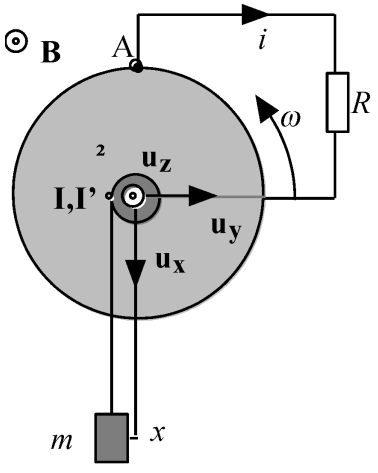
c) La puissance cŽdŽe aux charges par la fŽm eOA est $\mathcal{P}e = e$OA.$i = \omega B i a^2/2$.
DÕaprs la question 2), la puissance des forces de Laplace vaut
$\mathcal{P}L$ = **M**O.½ = Ð(ia^2/2).(**B**.½) = Ð$\mathcal{P}e$, soit $\mathcal{P}L + \mathcal{P}e = 0$:
Cette ŽgalitŽ traduit la nullitŽ de la puissance des forces magnŽtiques. Le signe de la fŽm eOA en dŽcoule.

4. Etude dÕun dispositif

a) Equation diffŽrentielle du mouvement

Equation Žlectrique
Le circuit Žlectrique ne comporte quÕune rŽsistance R, en nŽgligeant la rŽsistance du disque mŽtallique lÕŽquation Žlectrique sÕŽcrit :eOA = $\omega B a^2/2 = Ri$, soit

$$i = \omega B a^2/(2R)$$



Equation mŽcanique
RŽfŽrentiel : on se place dans le rŽfŽrentiel terrestre supposŽ galilŽen, dans lequel lÕaxe Æ est fixe.
Paramtres
Si la longueur de fil comprise entre le cylindre et la masse m est initialement verticale, le mouvement de la masse m est une translation rectiligne verticale. Le systme mŽcanique est dŽcrit par deux paramtres :

LÕangle θ repŽrant la position angulaire du disque ($\omega = d\theta/dt$) et x, c™te verticale de la masse m. Ces deux paramtres sont liŽs car le fil est inextensible et ne glisse pas.

LÕinextensibilitŽ du fil et la condition de nonÐglissement se traduisent par les relations :
(dx/dt).**ux** = **vI** et **vI** = **vIÕ** = $b\omega$.**ux** (I et IÕ sont les deux points co•ncidents appartenant au fil et au cylindre)

$$dx/dt = b\omega$$

Equation dynamique
On considre le systme {disque+cylindre, fil, masse}.
Toutes les forces de frottement sont nŽgligŽes et le fil est inextensible, les seules actions ˆ considŽrer sont

* les forces de pesanteur
* les actions associŽes aux forces de Laplace.

LÕŽnergie cinŽtique du systme a pour expression :

$$Ec = J\omega^2/2 + m(dx/dt)^2/2 = (J+mb^2)\omega^2/2$$

Les forces de pesanteur dŽrivent dÕun potentiel. Le centre de masse de lÕensemble disque+cylindre est fixe, le fil est de masse nŽgligeable, compte tenu de la convention dÕorientation (verticale descendante) :

$$Ep = -mgx + Cte$$

La puissance des actions associŽes aux forces de Laplace a ŽtŽ calculŽe ˆ la question 3.c :

$$\mathcal{P}L = -(iBa^2/2)\omega$$

Le **thŽorme de lÕŽnergie mŽcanique** $dEc/dt + dEp/dt = \mathcal{P}L$ sÕŽcrit alors :

$(J+mb^2)\omega.d\omega/dt - mg.dz/dt = -(iBa^2/2)\omega$,

soit en utilisant la relation $dx/dt = b\omega$ puis en simplifiant par ω :

$$\boxed{(J+mb^2).d\omega/dt + iBa^2/2 = mgb}$$

La combinaison de cette Žquation avec lÕŽquation Žlectrique $i = \omega Ba^2/(2R)$ conduit finalement ˆ lÕŽquation diffŽrentielle du premier ordre :

$$\boxed{(J+mb^2).d\omega/dt + [B^2a^4/(4R)].\omega = mgb}$$

b) Lorsque le rŽgime permanent est atteint, $d\omega/dt = 0$ et la vitesse limite vaut alors :

$$\boxed{\omega l = 4Rmgb/(B^2a^4)}$$

c) En multipliant les deux membres de lÕŽquation diffŽrentielle par $4R/(B^2a^4)$ et en introduisant le paramtre $\tau = 4R(J+mb^2)/(B^2a^4)$ on obtient la forme simplifiŽe :

$$\boxed{\tau.d\omega/dt + \omega = \omega l}$$

d) LÕŽquation diffŽrentielle sans second membre admet pour solution $\omega = \omega 0.\exp(-t/\tau)$, une solution particulire est $\omega = \omega l$, dÕo la solution gŽnŽrale de lÕŽquation diffŽrentielle :
$\omega(t) = \omega 0.\exp(-t/\tau) + \omega l$. La vitesse initiale est nulle donc $\omega 0 = -\omega l$, soit :

$$\boxed{\omega(t) = \omega l .[1 - \exp(-t/\tau)]}$$

La vitesse angulaire croÎt monotonement vers ωl . Cette valeur est atteinte ˆ 10% ˆ la date $t0$ telle que :
$[\omega l - \omega(t0)]/\omega l = 0{,}1$, dÕo $\exp(-t0/\tau) = 0{,}1$.
On en dŽduit :

$$\boxed{t0 = \tau.\ln(10)}$$

Le nombre de tours effectuŽs vŽrifie :

$$2\pi n = \Delta\theta = \int_0^{t_0} \omega dt = \int_0^{t_0} \omega_l[1 - \exp(-t/\tau)]dt = \omega_l.\left[t + \tau.\exp(-t/\tau)\right]_0^{t_0}$$

En utilisant la valeur de $t0$ on obtient :

$$\boxed{n = \tau\omega l .(\ln 10 - 0{,}9)/(2\pi)}$$

e) A.N. : $R = 0{,}5$ ½ ; $m = 10^{-2}$ kg ; $B = 0{,}5$ T

$$\boxed{\tau = 64{,}5 \text{ s} ; t0 = 148 \text{ s} ; \omega l = 78{,}4 \text{ rad.s}^{-1} ; n = 1130 \text{ tours}}$$

Remarque : La masse descend de $2^{1}nb = 71$ m : il nÕest pas pratique de mettre expŽrimentalement en Žvidence le rŽgime transitoire puis le rŽgime permanent avec les valeurs numŽriques proposŽes.