

ENGEE 1995 - Option Physique-Mathématiques

Epreuve de Physique (4 heures)

Premier exercice

I Equilibre d'un fil pesant et tendu

I.1

L'élément de fil situé entre les points M et N d'abscisses curvilignes s et $s + ds$ est soumis :

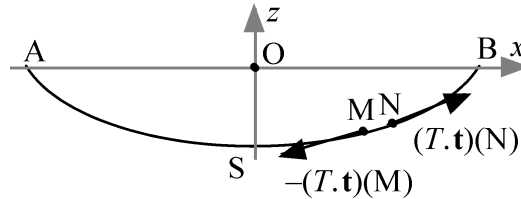
* à son poids, $\mu \cdot ds \cdot \mathbf{g}$;

* à la tension exercée en N par la partie

NB, $(T, \mathbf{t})(s + ds)$;

* à la tension exercée en M par la partie

AM, égale à $(T, \mathbf{t})(s)$ d'après le principe de l'action et de la réaction.



La condition d'équilibre s'écrit donc $(T, \mathbf{t})(s + ds) - (T, \mathbf{t})(s) + \mu \cdot ds \cdot \mathbf{g} = 0$, soit

$$d(T, \mathbf{t}) + \mu \cdot ds \cdot \mathbf{g} = 0 \quad (1)$$

I.2

a) Au point $M(x, z)$, $\mathbf{t} = dx/ds \cdot \mathbf{u}_x + dz/ds \cdot \mathbf{u}_z$, d'où

$$d(T, \mathbf{t}) = d(T \cdot dx/ds) \cdot \mathbf{u}_x + d(T \cdot dz/ds) \cdot \mathbf{u}_z.$$

Comme $\mathbf{g} = -g \cdot \mathbf{u}_z$, la projection de (1) sur $\mathbf{u}_x$ et $\mathbf{u}_z$ donne :

$$d(T \cdot dx/ds) = 0 ; d(T \cdot dz/ds) - \mu g \cdot ds = 0.$$

L'intégration de ces deux équations conduit aux relations demandées :

$$T \cdot dx/ds = \alpha ; T \cdot dz/ds = \mu g s + \beta, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux constantes}$$

(Remarque : la projection sur $\mathbf{u}_y$ permettrait de démontrer que la courbe décrite par le fil est située dans le plan vertical auquel appartiennent A et B)

b) Au point S, $s = 0$, $T = T_0$, $\mathbf{t} = \mathbf{u}_x$, soit $dx/ds = 1$ et $dz/ds = 0$. En reportant ces valeurs dans les équations précédentes on obtient :

$$\alpha = T_0 ; \beta = 0, \\ T \cdot dx/ds = T_0 ; T \cdot dz/ds = \mu g s$$

I.3

a) L'équation $T \cdot dx/ds = T_0$ entraîne $T = T_0 \cdot ds/dx$. On en déduit

$$T_0 \cdot ds/dx \cdot dz/ds = T_0 \cdot dz/dx = \mu g s, \text{ d'où la relation demandée :}$$

$$z'(x) = s/a, \text{ avec } a = T_0 / \mu g$$

b) La différentiation de la relation précédente donne : $dz'(x) = (1/a) \cdot ds$. L'expression de ds est

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx \cdot \sqrt{1 + z'^2(x)}. \text{ Par conséquent la fonction } z'(x) \text{ vérifie :}$$

$$\frac{dz'(x)}{\sqrt{1 + z'^2(x)}} = d\{\operatorname{argsh}[z'(x)]\} = dx / a$$

soit en intégrant :

$$\operatorname{argsh}[z'(x)] - \operatorname{argsh}[z'(0)] = \operatorname{argsh}[z'(x)] = x/a$$

car $x = 0$ correspond au point S pour lequel $z' = 0$.

On en déduit l'expression :

$$z'(x) = \operatorname{sh}(x/a),$$

qui s'intègre en

$$z(x) = a \operatorname{ch}(x/a) + C$$

Le fil passe par A et B de coordonnées $(\pm d, 0)$, d'où en reportant dans l'expression de $z(x)$:

$$C = -a \cdot \operatorname{ch}(d/a).$$

La fonction $z(x)$ s'écrit donc :

$$z(x) = a [\operatorname{ch}(x/a) - \operatorname{ch}(d/a)]$$

I.4

a) De la relation $z\tilde{O}(x) = s/a$ on tire $s = a.z\tilde{O}(x) = a.sh(x/a)$.

Par conséquent, $L = s(B) \Leftrightarrow s(0) = s(d) \Leftrightarrow s(0) = a.sh(d/a)$

$$L/a = sh(d/a)$$

b) Le point S a pour coordonnées $(0, dh)$, d'où, en reportant dans l'expression de $z(x)$:

$h = a[ch(d/a) - 1]$. En exprimant $ch(d/a) = \sqrt{1 + sh^2(d/a)} = \sqrt{1 + (L/a)^2}$, on obtient la relation :

$$h = a[ch(d/a) - 1] = a(\sqrt{1 + (L/a)^2} - 1)$$

c) A partir de l'équation $T.d\mathbf{x}/ds = T_0$ et de l'expression $s = a.sh(x/a)$ on obtient

$$T = T_0.ch(x/a)$$

I.5

a) La section du fil de rayon r vaut r^2 , donc l'expression de sa masse linéique μ en fonction de sa masse volumique ρ est : $\mu = \rho r^2$.

Puisque $T = T_0.ch(x/a)$, la tension est maximale aux points d'attache A et B du câble, soit $x = \pm d$. Donc

$$T_{\max} = T_0.ch(d/a) = T_0 \sqrt{1 + (L/a)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{A.N. : } \mu &= 5,6 \text{ kg.m}^{-1} ; a = T_0/\mu g = 240 \text{ m} ; \\ d &= \text{argsh}(L/a) = 97 \text{ m} ; h = 20 \text{ m} \\ T_{\max} &= 14 \text{ kN} : \text{il n'y a pas risque de rupture.} \end{aligned}$$

$$b) \mu = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1} ; a = 7,7 \cdot 10^4 \text{ m} ; L/a = 0,5/7,7 \cdot 10^4 = 6,5 \cdot 10^{-6} \ll 1$$

$$h = a(\sqrt{1 + (L/a)^2} - 1) \approx L^2 / 2a = 1,6 \mu\text{m} : \text{le fil est pratiquement rectiligne}$$

II. Propagation d'ondes dans un fil tendu

II.1

L'élément de fil MN, de masse dm , est soumis :

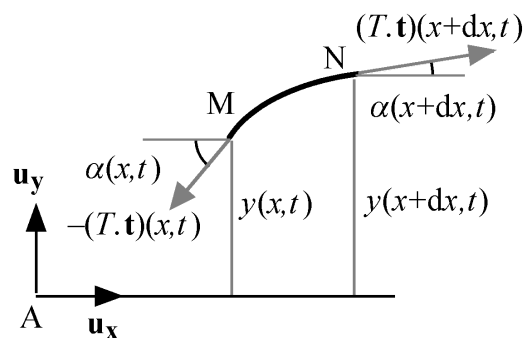
* à son poids (négligé d'après l'hypothèse)

* aux forces de tension dont la résultante est égale, d'après I.1, à

$$(T.t)(x+dx, t) \Leftrightarrow (T.t)(x, t) = dx \cdot \|(T.t)(x, t)\|/x$$

On note σ l'angle $(\mathbf{u}, \mathbf{t})$:

$$\mathbf{t}(x, t) = \cos\sigma(x, t) \cdot \mathbf{u}_x + \sin\sigma(x, t) \cdot \mathbf{u}_y.$$



Les déplacements du fil étant de faible amplitude, $\tan\sigma(x, t) = (y'/x)(x, t) \ll 1$ et $\sigma \ll \hat{E}1$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'élément MN s'écrit alors en notant l'accélération du centre de masse, dirigée selon $\mathbf{u}_y$, a_y :

$a(x, t).dm \cdot \mathbf{u}_y = dx \cdot \|(T.t)(x, t)\|/x$, et en projection sur $\mathbf{u}_x$ et $\mathbf{u}_y$:

$$\|(T.\cos\sigma)(x, t)\|/x = 0 ; dx \cdot \|(T.\sin\sigma)(x, t)\|/x = a.dm$$

La première relation s'intègre en $(T.\cos\sigma)(x, t) = C(t)$. La pente σ est très faible et les variations de tension dues au déplacement du fil par rapport à sa position d'équilibre négligeables donc $C(t)$ est égal (à des infiniment petits près) à la tension du fil à l'équilibre T_0 , soit $T.\cos\sigma = T_0$.

En reportant dans la seconde équation et en utilisant $\tan \alpha = y'/x$ on obtient :

$$T_0 dx (\frac{d}{dt} \tan \alpha(x, t) / x) = T_0 dx \frac{d^2 y(x, t)}{dx^2} = a(x, t) dm$$

La longueur MN vaut $dx/\cos \alpha$ et $dm = \mu dx/\cos \alpha = \mu dx$ l'ordre dominant car $\alpha \ll 1$.

Pour un élément MN infiniment petit, l'accélération $a(x, t)$ est égale à des infiniment petits

l'accélération du point M : $d^2 y(x, t)/dt^2$.

Par conséquent l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d^2 y(x, t)}{dx^2} - (\mu/T_0) \frac{d^2 y(x, t)}{dt^2} = 0$$

C'est une équation de D'Alembert à une dimension :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - (1/v^2) \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \text{ pour laquelle la célérité } v = \sqrt{T_0 / \mu}$$

II.2

La vitesse de phase des ondes est égale à leur célérité, soit d'après l'équation précédente :

$$v_{\phi} = v = \sqrt{T_0 / \mu}$$

A.N. : $T_0 = 4,7 \text{ kN}$; $\mu = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}$; $v = 870 \text{ m.s}^{-1}$

II.3

a) Pour une solution stationnaire $y(x, t) = y_0 \cos(kx + \phi) \cos(\omega t + \psi)$, les dérivées secondes valent

$$\frac{d^2 y(x, t)}{dx^2} = -k^2 y(x, t) \text{ et } \frac{d^2 y(x, t)}{dt^2} = -\omega^2 y(x, t). \text{ L'équation du mouvement s'écrit alors}$$

$$[(\omega/v)^2 - k^2] y(x, t) = 0.$$

On en déduit la relation entre ω , k et v pour toute solution non identiquement nulle :

$$k = \pm \omega/v = \pm \omega \sqrt{\mu / T_0}$$

b) Le fil est fixé à ses deux extrémités A et B, la fonction $y(x, t)$ vérifie par conséquent les conditions aux limites $y(x_A, t) = y(x_B, t) = 0$ pour tout t :

$$\cos(kx_A + \phi) = \cos(kx_B + \phi) = 0$$

d'où

$$kx_A + \phi = (2m + 1)\pi/2 \text{ et } kx_B + \phi = (2n + 1)\pi/2 \text{ où } m \text{ et } n \text{ sont deux entiers.}$$

En éliminant ϕ et en introduisant la longueur $2L$ du fil :

$$k(x_B - x_A) = k \cdot 2L = p\pi \text{ (} p \text{ entier non nul)}$$

Les différents modes de vibration sont caractérisés par les valeurs de k :

$$kp = p\pi/2L$$

Les fréquences associées sont données par :

$$\nu_p = \omega_p/2\pi = v.kp/2\pi = p.v/4L, p \text{ entier naturel}$$

Pour le mode fondamental, $p = 1$, d'où :

$$\nu_0 = v/4L$$

c) A.N. : $v = 870 \text{ m.s}^{-1}$; $2L = 1 \text{ m}$; $\nu_0 = 435 \text{ Hz}$. On calcule ensuite

mode	1	2	3	4	(5)
ν (Hz)	435	870	1305	1740	(2175 > 2000)

Deuxime exercice

1. Moment d'inertie

Le moment d'inertie par rapport à son axe d'un disque homogène de masse m , de rayon r vaut :

$$J = \frac{mr^2}{2} = \mu \left(\frac{1}{2} r^2 h \right) = \left(\frac{1}{2} \right) \mu r^4 h \text{ en introduisant la masse volumique } \mu \text{ et l'épaisseur } h.$$

Pour le système de deux disques coaxiaux étudiés, on trouve en utilisant l'additivité des moments d'inertie

$$J_A = \left(\frac{1}{2} \right) (\mu a^4 h + \mu b^4 h)$$

$$\text{A.N. : } J_A = 8,05 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

2. Moment des forces de Laplace

Remarque : tout au long de cet exercice les phénomènes d'autoinduction sont négligés.

On considère une ligne de courant élémentaire joignant O et A parcourue par l'intensité di . La contribution au moment en O des forces de Laplace de la portion infinitésimale $d\mathbf{l}$ de cette ligne de courant centrée sur le point M s'écrit

$$d^2 \mathbf{M}_O = \mathbf{OM} \wedge d^2 \mathbf{f}_M = \mathbf{OM} \wedge (di \cdot d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}) = di [d\mathbf{l} (\mathbf{OM} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\mathbf{OM} \cdot d\mathbf{l})]$$

$\mathbf{OM} \cdot \mathbf{B} = 0$ car le champ $\mathbf{B}$ est perpendiculaire au plan du disque ;

le vecteur $d\mathbf{l}$ correspond au déplacement élémentaire le long de la ligne de courant considérée donc $d\mathbf{l} = d\mathbf{OM}$ et $\mathbf{OM} \cdot d\mathbf{l} = d(\mathbf{OM}^2)/2$;

$$\text{par conséquent } d^2 \mathbf{M}_O = - di \cdot d(\mathbf{OM}^2) \cdot \mathbf{B} / 2$$

L'intégration le long de cette ligne de courant entre O et A (convention d'orientation de l'axe nonc pour i) conduit à :

$$d\mathbf{M}_O = - \int_O^A di \cdot d(\mathbf{OM}^2) \cdot \mathbf{B} / 2 = - di \cdot \mathbf{OA}^2 \cdot \mathbf{B} / 2 = - di \cdot a^2 \cdot \mathbf{B} / 2$$

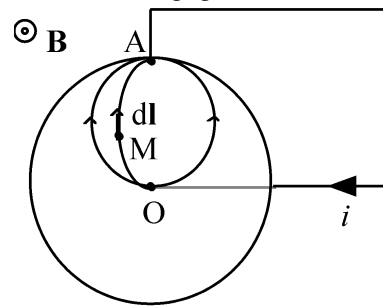
car $\mathbf{B}$ est uniforme et di se conserve le long d'une ligne de courant dans le cadre de l'ARQP.

Le facteur $a^2 \cdot \mathbf{B} / 2$ ne dépend pas de la ligne de courant considérée. L'intégration de la relation précédente sur l'ensemble des lignes de courant apparaissant dans le disque est immédiate et conduit à l'expression du moment total des forces de Laplace en O :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{B} (i a^2 / 2)$$

3. Champ électromoteur et fém induite

On étudie un conducteur mobile dans un champ permanent : cas de Lorentz.



a) Au point M, le champ $\vec{E}$ électromoteur s'écrit :

$\vec{E}_m = \vec{v}_M \wedge \vec{B}$, où $\vec{v}_M$ est la vitesse du point M par rapport au référentiel d'étude.

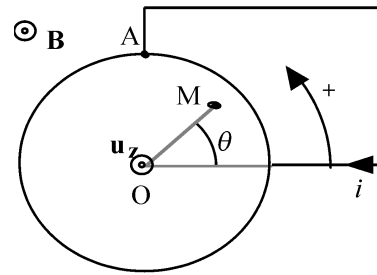
$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \frac{1}{2} \wedge \vec{OM} = \frac{1}{2} \wedge \vec{OM}$, car O est situé sur l'axe de rotation $\mathcal{A} = (O, \vec{u}_z)$.

$$\vec{E}_m = (\frac{1}{2} \wedge \vec{OM}) \wedge \vec{B} = \vec{OM} (\frac{1}{2} \cdot \vec{B}) \cdot \frac{1}{2} (\vec{OM} \cdot \vec{B}) = \vec{OM} (\frac{1}{2} \cdot B)$$

($\vec{OM}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux)

D'après le schéma, $\frac{1}{2} = \omega \cdot \vec{u}_z$ où $\omega = d\theta/dt$, et $\vec{B} = B \cdot \vec{u}_z$ ($\vec{B}$ est colinéaire à l'axe $\mathcal{A}$). Donc $\frac{1}{2} \cdot \vec{B} = \omega B$ et

$$\vec{E}_m = \omega B \cdot \vec{OM}$$



b) Le long d'une ligne de courant quelconque la fém induite a pour expression, compte tenu de la convention d'orientation pour i :

$$e_{OA} = \int_O^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_O^A \omega B \cdot (\vec{OM} \cdot d\vec{OM}) = \omega B \cdot OA^2 / 2 = \omega B a^2 / 2$$

Cette expression est indépendante de la ligne de courant considérée.

L'expression de la fém induite entre O et A s'écrit :

$$e_{OA} = \omega B a^2 / 2$$

c) La puissance cédée aux charges par la fém e_{OA} est $\mathcal{P}_e = e_{OA} \cdot i = \omega B i a^2 / 2$.

D'après la question 2), la puissance des forces de Laplace vaut

$$\mathcal{P}_L = \vec{M}_O \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \frac{1}{2}) = \mathcal{P}_e, \text{ soit } \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_e = 0 :$$

Cette égalité traduit la nullité de la puissance des forces magnétiques. Le signe de la fém e_{OA} en découle.

4. Etude d'un dispositif

a) Equation différentielle du mouvement

Equation électrique

Le circuit électrique ne comporte qu'une résistance R , en négligeant la résistance du disque métallique l'équation

électrique s'écrit : $e_{OA} = \omega B a^2 / 2 = Ri$, soit

$$i = \omega B a^2 / (2R)$$

Equation mécanique

Référentiel : on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen, dans lequel l'axe $\mathcal{A}$ est fixe.

Paramètres

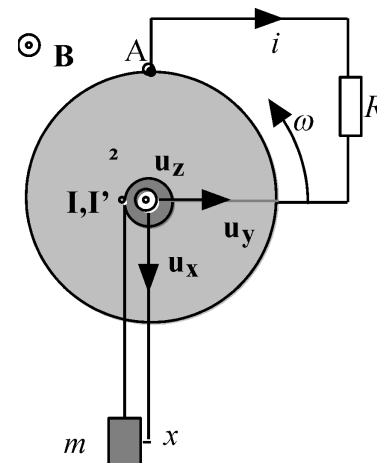
Si la longueur de fil comprise entre le cylindre et la masse m est initialement verticale, le mouvement de la masse m est une translation rectiligne verticale. Le système mécanique est décrit par deux paramètres :

L'angle θ représentant la position angulaire du disque ($\omega = d\theta/dt$) et x , cote verticale de la masse m . Ces deux paramètres sont liés car le fil est inextensible et ne glisse pas.

L'inextensibilité du fil et la condition de non-déglissement se traduisent par les relations :

$(dx/dt) \cdot \vec{u}_x = \vec{v}_I$ et $\vec{v}_I = \vec{v}_{I'} = b\omega \cdot \vec{u}_x$ (I et I' sont les deux points coïncidents appartenant au fil et au cylindre)

$$dx/dt = b\omega$$



Equation dynamique

On considère le système {disque+cylindre, fil, masse}.

Toutes les forces de frottement sont négligées et le fil est inextensible, les seules actions à considérer sont

- * les forces de pesanteur
- * les actions associées aux forces de Laplace.

L'énergie cinétique du système a pour expression :

$$E_c = \frac{J\omega^2}{2} + m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2/2 = (J + mb^2)\omega^2/2$$

Les forces de pesanteur dérivent d'un potentiel. Le centre de masse de l'ensemble disque+cylindre est fixe, le fil est de masse négligeable, compte tenu de la convention d'orientation (verticale descendante) :

$$E_p = Dmgx + Cte$$

La puissance des actions associées aux forces de Laplace a été calculée à la question 3.c :

$$\mathcal{P}_L = D(iBa^2/2)\omega$$

Le théorème de l'énergie mécanique $dE_c/dt + dE_p/dt = \mathcal{P}_L$ s'écrit alors :

$$(J + mb^2)\omega \cdot d\omega/dt + mg \cdot dz/dt = D(iBa^2/2)\omega,$$

soit en utilisant la relation $dx/dt = b\omega$ puis en simplifiant par ω :

$$(J + mb^2) \cdot d\omega/dt + iBa^2/2 = mgb$$

La combinaison de cette équation avec l'équation électrique $i = \omega Ba^2/(2R)$ conduit finalement à l'équation différentielle du premier ordre :

$$(J + mb^2) \cdot d\omega/dt + [B^2 a^4/(4R)] \cdot \omega = mgb$$

b) Lorsque le régime permanent est atteint, $d\omega/dt = 0$ et la vitesse limite vaut alors :

$$\omega_l = 4Rmgb/(B^2 a^4)$$

c) En multipliant les deux membres de l'équation différentielle par $4R/(B^2 a^4)$ et en introduisant le paramètre $\tau = 4R(J + mb^2)/(B^2 a^4)$ on obtient la forme simplifiée :

$$\tau \cdot d\omega/dt + \omega = \omega_l$$

d) L'équation différentielle sans second membre admet pour solution $\omega = \omega_0 \cdot \exp(Dt/\tau)$, une solution particulière est $\omega = \omega_l$, d'où la solution générale de l'équation différentielle :

$\omega(t) = \omega_0 \cdot \exp(Dt/\tau) + \omega_l$. La vitesse initiale est nulle donc $\omega_0 = -\omega_l$, soit :

$$\omega(t) = \omega_l \cdot [1 - \exp(Dt/\tau)]$$

La vitesse angulaire croît monotonement vers ω_l . Cette valeur est atteinte à 10% à la date t_0 telle que : $[\omega_l - \omega(t_0)]/\omega_l = 0,1$, d'où $\exp(Dt_0/\tau) = 0,1$.

On en déduit :

$$t_0 = \tau \ln(10)$$

Le nombre de tours effectués vérifie :

$$2\pi n = \Delta\theta = \int_0^{t_0} \omega dt = \int_0^{t_0} \omega_l [1 - \exp(-t/\tau)] dt = \omega_l \cdot [t + \tau \cdot \exp(-t/\tau)]_0^{t_0}$$

En utilisant la valeur de t_0 on obtient :

$$n = \tau \omega_l \cdot (\ln 10 + 0,9)/(2\pi)$$

e) A.N. : $R = 0,5 \frac{1}{2} \Omega$; $m = 10^{-2}$ kg ; $B = 0,5$ T

$$\tau = 64,5 \text{ s} ; t_0 = 148 \text{ s} ; \omega_l = 78,4 \text{ rad.s}^{-1} ; n = 1130 \text{ tours}$$

Remarque : La masse descend de 21 m : il n'est pas pratique de mettre expérimentalement en évidence le régime transitoire puis le régime permanent avec les valeurs numériques proposées.