

Constante de gravitation universelle et masse de la Terre

- A. 1 Chaque force crée un moment : $\Gamma = F L/2$
 (force à multiplier par le bras de levier)
 À l'équilibre le moment total est nul ;
- d'où : $2 (F L/2) - C\theta = 0$
 $F =$
!Fin de l'expression inattendue. = - !Fin de l'expression inattendue.
- A. 2 Si la force exercée par la tige est la seule force orthoradiale (i.e. tangentielle), il en résulte une accélération : *!Fin de l'expression inattendue. = - !Fin de l'expression inattendue.*
- A. 3 Or la composante orthoradiale de l'accélération s'écrit en général : *!Fin de l'expression inattendue. = [r !Fin de l'expression inattendue. + 2 !Fin de l'expression inattendue. !Fin de l'expression inattendue.] !Fin de l'expression inattendue.*
 Ici : $r = L/2$ *!Fin de l'expression inattendue. = -*
l'expression inattendue. = 0
- Cette équation est l'équation d'un oscillateur harmonique : *!Fin de l'expression inattendue. + ω_0^2*
 $\theta = 0$
 avec : $\omega_0 =$
- Le mouvement d'une masse est donné par : $\theta = A \cos(\omega_0 t - \phi)$
- avec A et ϕ constantes liées aux conditions initiales.
- A. 4 La période du mouvement est : $T = 2\pi = \pi$
 D'où : $C =$
- A. 5 Chaque masse m est soumise à plusieurs forces :
 • le poids qui est compensé par le dispositif puisque les masses sont contraintes à se déplacer dans le plan horizontal xOy ,
 • les forces de gravitation entre les deux masses m sont radiales, elles n'ont aucune incidence sur le mouvement des masses m qui décrivent forcément une trajectoire circulaire, *!Fin de l'expression inattendue. = - !Fin*

- la force de rappel due au fil de torsion et transmise par la tige (*cf.* A. 1.) :

- la force de gravitation exercée par la masse M la plus proche (*cf.* schéma)

(*N.B.* il n'y a pas de signe “-” car ici le vecteur **!Fin de l'expression inattendue.** est dirigé vers la source du champ de gravitation, contrairement à l'usage habituel)

- la force de gravitation exercée par l'autre masse M (la plus éloignée) ; celle-ci est nettement plus faible que la précédente (100 fois plus faible avec les valeurs numériques données) et surtout elle est presque radiale (*cf.* schéma) c'est à dire qu'elle n'a pratiquement aucun effet sur le mouvement de la tige.

de l'expression inattendue.

!Fin de l'expression inattendue. = !Fin de l'expression inattendue.

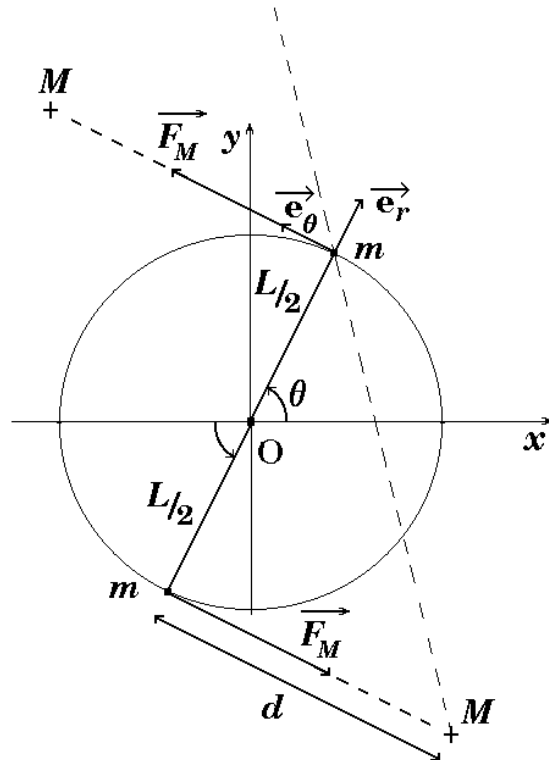
Schéma explicatif

Sur le schéma, pour des raisons de lisibilité, la longueur d a été exagérée par rapport à L ; de même l'angle θ est surévalué.

Le schéma montre les positions des deux masses M ; on voit qu'avec une telle disposition (pas très bien décrite par l'énoncé) le bras de levier est exactement $L/2$.

On voit également que la droite (représentée en pointillés) joignant l'autre masse M (celle qui est la plus éloignée) à une masse m serait pratiquement radiale si la condition $d \ll L$ était respectée ; ce qui explique que l'on n'ait à prendre en compte qu'une seule force de gravitation par masse m .

On pourra vérifier que dans le cas où $d \ll L$ le bras de levier de la force négligée est d^2/L soit ici 2 cm alors que la force prise en compte a un levier de 1 m.



A. 6

À l'équilibre, les forces orthoradiales se compensent :

d'où :

!Fin de l'expression inattendue. + !Fin de l'expression inattendue. = !Fin de l'expression inattendue.

$$- = 0$$

$$G =$$

$$C =$$

A. 7

La première expérience permet de calculer la constante de torsion du fil :

$$\text{avec : } T = 271,5 \text{ s ; } L = 2 \text{ m ; } m = 10,105 \text{ kg}$$

$$C = 1,083 \cdot 10^{-2} \text{ N.m.rad}^{-1}$$

La deuxième expérience permet de déterminer la constante de gravitation :

$$G =$$

L'angle θ est déterminé par sa tangente :

$$\tan \theta =$$

$$\text{avec ici : } D = 2,5 \text{ m et } \delta = 1,21 \text{ mm d'où :}$$

$$\tan \theta = 4,84 \cdot 10^{-4}$$

Cette valeur est, bien entendu, suffisamment faible pour que l'on puisse assimiler l'angle et sa tangente, d'où :

$$G =$$

et numériquement :

$$G = 6,56 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$$

- A. 8 En admettant que le champ de gravitation créé par la Terre est le même que si la masse de la Terre était concentrée en son centre :

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

d'où :

- A. 9 Le volume terrestre est :
d'où la masse volumique moyenne de la Terre :

$$V = \frac{4}{3}\pi R_T^3$$

$$\rho_T = \frac{M_T}{V}$$

AN en adoptant $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$; $R_T = 6400 \text{ km}$ et la valeur de G obtenue à la question A. 7. on obtient :

$$M_T = 6,1.10^{24} \text{ kg}$$

$$\rho_T = 5,6.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

- A. 10 La masse volumique est vraisemblablement beaucoup plus grande à l'intérieur qu'en surface puisque, en moyenne, elle est près de deux fois plus grande qu'en surface.

- A. 11 • Étude pour $r > R_T$

$$+2 = 0$$

$$+2 = 0$$

Puisque $\rho = 0$ l'équation est plus simple :

On peut séparer les variables :

par intégration :

$$\ln(g) + 2 \ln(r) = 0 \quad ; \quad \ln(g r^2) = C_{te}$$

d'où :

$$g(r) = \frac{K}{r^2}$$

avec (cf. question A. 8) :

$$K = G M_T = G \rho_T R_T^3$$

- Étude pour $r < R_T$

Puisque $\rho \neq 0$ il faut utiliser l'équation complète :

$$+2 = 4\pi G \rho_T r$$

On peut voir une solution évidente :

g fonction **linéaire** de r

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi G \rho_T r$$

sinon il faut utiliser la méthode mathématique dite *de la variation de la constante*, on pose donc :

avec f : fonction à déterminer.

En reportant dans l'équation, on obtient :

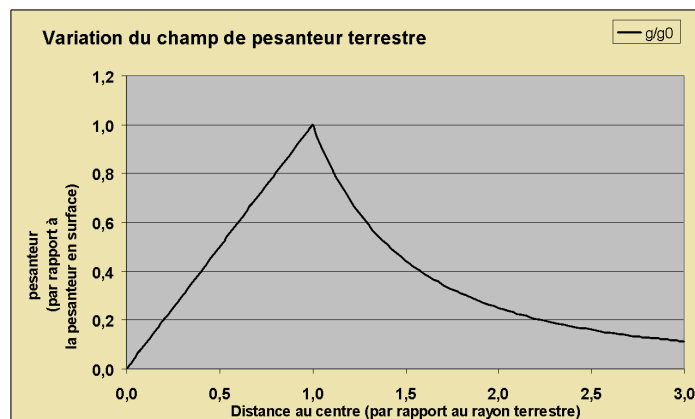
$$= 4\pi G \rho_T r^2$$

et par intégration :

$$f(r) = \frac{2}{3}\pi G \rho_T r^3 + C_{te}$$

Il faut adopter $C_{te} = 0$ car le champ de pesanteur ne peut qu'être nul au centre de la Terre, alors :

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi G \rho_T r$$



On remarque qu'il y a continuité du champ de pesanteur à la surface de la Terre puisque :

$$g(R_T) = R_T G \rho_T =$$

12

Au voisinage de la surface terrestre :

$$g \approx g(R_T) = R_T G \rho_T$$

et donc :

$$\approx G \rho_T$$

L'équation reliant la pesanteur à la masse volumique :

$$+ 2 = 4 \pi G \rho(r)$$

peut donc être simplifiée :

$$+ G \rho_T = 4 \pi G \rho(r)$$

ou encore

$$\rho(r) = + \rho_T$$

Il suffit donc de mesurer pour accéder à $\rho(r)$.

On peut éventuellement déterminer cette dérivée par comparaison des périodes de deux pendules placés à des profondeurs différentes.

Expérience de MILLIKAN et charge de l'électron

- 1 Chaque goutte est soumise à trois forces : **!Fin de l'expression**
- son poids : **inattendue. = $r^3 \rho$**
 - la poussée d'ARCHIMÈDE dont on admettra qu'elle obéit à la même expression que si la goutte était immobile ; **!Fin de l'expression inattendue.**
- cette force est en fait négligeable car $\rho' \ll \rho$: **!Fin de l'expression**
- la force de frottement donnée par la formule de STOKES : **inattendue. = $- r^3 \rho'$**
- !Fin de l'expression inattendue.**
- !Fin de l'expression**
- inattendue. = $- 6 \pi r$**
- η !Fin de l'expression**
- inattendue.**
- 2 En négligeant la poussée d'ARCHIMÈDE : **m !Fin de l'expression**
- inattendue. = !Fin de**
- En orientant l'axe vertical vers le bas (vecteur unitaire **!Fin de l'expression inattendue.**), en supposant la vitesse toujours verticale et en posant : **l'expression inattendue. + !Fin de l'expression inattendue.**
- !Fin de l'expression inattendue.**
- = v !Fin de l'expression**
- inattendue.**
- On obtient l'équation différentielle : **!Fin de l'expression inattendue.**
- = g !Fin de l'expression**
- inattendue.**
- que l'on peut également écrire (en anticipant sur la question suivante) : **m !Fin de l'expression**
- inattendue. = $r^3 \rho g - 6 \pi r \eta v$**
- dont la solution est (si on suppose que la vitesse est nulle à l'instant initial) :
- T !Fin de l'expression**
- inattendue. + $v = V_0$**
- $v = V_0 (1 - \exp(-t/T))$**
- 3 La comparaison des deux écritures de l'équation différentielle donne : **$T =$!Fin de l'expression**
- inattendue.**
- $V_0 =$!Fin de l'expression**
- inattendue.**
- ou en remplaçant la masse de la goutte par son expression :
- $T =$!Fin de l'expression**
- inattendue.**
- On remarque que : **$V_0 = T g$**
- 4 Aux forces déjà envisagées, il faut ajouter la force électrique : **!Fin de l'expression inattendue. = q**
- !Fin de l'expression inattendue.**
- où : **!Fin de l'expression inattendue. = $-$**
- V**
- !Fin de l'expression inattendue. =**

le champ est uniforme puisque le potentiel V est une fonction affine de l'altitude :

(si $U > 0$; le champ est dirigé vers le bas)

L'expression de la force est donc :

À l'équilibre :

il n'a donc pas de force de frottement visqueux :

La résultante des deux autres forces est donc nulle :

On obtient l'expression de la tension U à appliquer pour réaliser l'équilibre (négative si la charge est positive) :

!Fin de l'expression inattendue. **!Fin de l'expression inattendue.**

!Fin de l'expression inattendue. $= q$

!Fin de l'expression inattendue. **!Fin de l'expression inattendue.**

!Fin de l'expression inattendue. $=$

!Fin de l'expression inattendue. $=$

!Fin de l'expression inattendue. $=$

!Fin de l'expression inattendue. $=$

!Fin de l'expression inattendue. $+$

!Fin de l'expression inattendue. $=$

!Fin de l'expression inattendue.

$r^3 \rho g$ **!Fin de l'expression**

inattendue. $+ q$!Fin de

l'expression inattendue. **!Fin de l'expression inattendue.** $=$!Fin de

l'expression inattendue.

$$U = -$$

6

Dans l'expression de V_0 , l'unique grandeur variable est le rayon de la goutte. La mesure du temps mis par une goutte pour parcourir une distance connue permet d'accéder à V_0 (si on peut négliger la constante de temps τ devant la durée du déplacement) et donc à r .

La détermination de la d.d.p. U permettant de réaliser l'équilibre de la charge donne la valeur de celle-ci, si le rayon est connu.

En conséquence on procède comme suit :

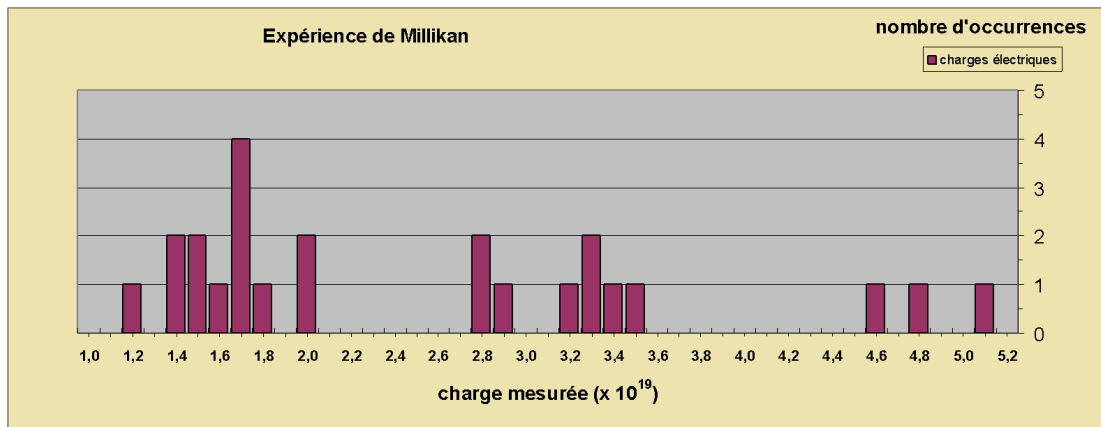
- immobilisation de la goutte pour une d.d.p. U connue,
 - on supprime la tension U et on mesure alors V_0 (vitesse limite de chute)
- On en déduit la charge par un calcul facile.

B. 7

À partir des valeurs mesurées on trace l'histogramme ci-dessous.

L'histogramme correspond à des intervalles égaux à 10^{-20} C et doit être interprété comme suit :

- une mesure comprise entre $1,15 \cdot 10^{-19}$ C et $1,25 \cdot 10^{-19}$ C ;
 - aucune mesure comprise entre $1,25 \cdot 10^{-19}$ C et $1,35 \cdot 10^{-19}$ C ;
 - deux mesures comprises entre $1,35 \cdot 10^{-19}$ C et $1,45 \cdot 10^{-19}$ C ;
- etc...



L'histogramme est conforme avec la quantification de la charge :

toutes les charges sont des multiples d'une charge élémentaire e .

L'examen attentif de l'histogramme met en évidence trois massifs :

- un massif correspondant à 13 mesures dont la moyenne est : $1,614 \cdot 10^{-19}$ C
- un massif correspondant à 8 mesures dont la moyenne est : $3,158 \cdot 10^{-19}$ C
- un massif correspondant à 8 mesures dont la moyenne est : $4,796 \cdot 10^{-19}$ C

On peut raisonnablement faire l'hypothèse qu'il s'agit de charges égales à : e , $2e$ et $3e$.

Cette hypothèse conduit à une moyenne pour l'ensemble des mesures de l'ordre de :

$e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C avec une incertitude encore relativement élevée (il n'y a que

24 mesures) par exemple $\Delta e \approx 0,20 \cdot 10^{-19}$ C (obtenue en comparant la moyenne sur l'ensemble des massifs et la moyenne sur un massif particulier).

Bien entendu, la charge de l'électron est l'opposé de la charge élémentaire :

$$q_{\text{électron}} = -e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

8

Constante de BOLTZMANN

C. 1 L'équation de la statique des fluides s'écrit : $= - \rho g$

La pression P et le masse volumique ρ d'un gaz parfait sont $\rho =$
 reliées par l'équation d'état :

En utilisant la constante d'AVOGADRO, on peut relier d'une $M = m$
 part la masse molaire M et la masse m d'une molécule et d'autre
 part la constante (molaire) R des gaz parfaits et la constante k de $R = k$
 BOLTZMANN. $=$

On en déduit :
 et :

$$\rho =$$

d'où une nouvelle écriture de l'équation de la $= - g$
 statique des fluides :

En privilégiant la grandeur ρ après avoir multiplié par : $= - \rho$

on obtient (car la température T est constante ici) : $+ = 0$

que l'on peut encore écrire : $H =$

où H est la hauteur d'échelle de l'atmosphère :

La solution de cette équation est :

$$\rho = \rho_0 \exp(-z/H)$$

C. 2 L'altitude du barycentre est calculée par
 adaptation de la formule classique :

au cas envisagé :

$$z_G =$$

$$z_G =$$

On détermine facilement que :

$$= H \rho_0$$

une intégration par parties (non
 détaillée) donne :

$$= H^2 \rho_0$$

en conclusion :

$$z_G = H =$$

C. 3

La difficulté de l'expérience (réalisée par JEAN PERRIN entre 1906 et 1908 et décrite dans son célèbre livre *les atomes*) est d'obtenir des petites particules solides quasiment identiques et de masse volumique à peine supérieure à celle du fluide.

Dans ces conditions la concentration de ces particules est donnée par une relation analogue à celle vue plus haut :

$$C = C_0 \exp(-z/H')$$

$$\text{avec : } H' =$$

$$m_{\text{ap}} = m (1 -)$$

où m_{ap} est la masse apparente des particules c'est à dire en tenant compte de la poussée d'ARCHIMÈDE :

où ρ et ρ_s sont les masses volumiques respectivement des particules et du solvant.

La détermination de la hauteur H' permet d'accéder à la constante de BOLTZMANN ; on peut pour cela :

- mesurer les concentrations à deux altitudes différentes
- ou
- déterminer l'altitude du centre de masse qui s'identifie à la hauteur

H'

Historiquement l'obtention de la constante de BOLTZMANN a permis également la détermination de la constante d'AVOGADRO.

Vitesse de la lumière

1 L'angle existant entre le rayon incident (orienté en sens inverse de la propagation) et le rayon réfléchi est, en raison des lois de la réflexion, égal au double de l'angle d'incidence.

Quand le miroir tourne d'un angle α , la normale au miroir tourne d'un angle α , l'angle d'incidence augmente alors de α , l'angle de réflexion aussi et l'angle existant entre le rayon incident et le rayon réfléchi varie de 2α :

$$\beta = 2\alpha$$

2 Les deux réflexions sur le miroir ont lieu à un intervalle de temps (aller et retour) :
ce qui correspond à une rotation du miroir :
Le déplacement du spot est :

$$\Delta t = 2L/c$$

$$\alpha = \Omega \Delta t = \Omega (2L/c)$$

L'angle β étant très petit, on peut assimiler la tangente à l'angle (exprimé en radian) :

$$SS' = d \tan \beta$$

$$SS' \approx d \beta$$

d'où :

$$SS' = d \tan \beta \approx d$$

3 La vitesse angulaire Ω du miroir est reliée à la fréquence ν par :

$$\Omega = 2\pi \nu$$

$$c = \lambda \nu$$

$$\text{AN} \quad c \approx 3,02.10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\nu = 1\,000 \text{ Hz} ;$$

$$L = 15 \text{ m} ;$$

$$d = 10 \text{ m} ;$$

$$SS' = 12,5 \text{ mm} ;$$

Nombre de MACH

1

On note Σ le système **ouvert** compris entre les abscisses x et $x + d$. Ce système sert de base à la définition d'un système **fermé** auquel le premier principe de la thermodynamique est appliqué.

Définition du système

État initial (t)	État final ($t + \Delta t$)
Σ contenu de la canalisation compris entre les abscisses x et $x + d$	Σ contenu de la canalisation compris entre les abscisses x et $x + d$
Σ_e masse m prête à traverser la section d'entrée (d'abscisse x)	Σ_s masse m venant de traverser la section de sortie (d'abscisse $x + d$)

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit ici :

$$\Delta U + \Delta = W + Q$$

L'écoulement est adiabatique

$$Q = 0$$

Le travail est constitué par les travaux d'entrée W_e et de sortie W_s ; le travail d'entrée est égal au produit de la pression à l'entrée par le volume balayé (i.e.

$$W_e = P(x)$$

$$W_s = -P(x + d)$$

le volume de Σ_e) :

Le travail de sortie est :

La variation d'énergie interne doit être explicitée en fonction des différentes parties du système :

le régime étant permanent :

$$\Delta U = U\Sigma(t + \Delta t) - U\Sigma(t) + U_s - U_e$$

par ailleurs on peut utiliser les énergies internes massiques :

En conclusion :

$$U\Sigma(t + \Delta t) = U\Sigma(t)$$

$$U_e = m u(x) \quad ; \quad U_s = m u(x + d)$$

$$\Delta U = m [u(x + d) - u(x)]$$

Le raisonnement fait avec l'énergie interne peut être fait avec l'énergie cinétique macroscopique :

$$\Delta = 1/2 m [v_2(x + d) - v_2(x)]$$

En conclusion (après simplification par m) :

$$u(x + d) + 1/2 v_2(x + d) - u(x) - 1/2 v_2(x) = P(x) - P(x + d)$$

L'inverse de la masse volumique étant le volume massique, l'enthalpie massique h peut s'écrire :

$$h(x) = u(x) + P(x)$$

D'où le bilan :

$$h(x + d) + 1/2 v_2(x + d) - h(x) - 1/2 v_2(x) = 0$$

Il suffit alors d'écrire la 2ème loi de JOULE pour obtenir :

$$c_p [T(x + d) - T(x)] + 1/2 [v_2(x + d) - v_2(x)] = 0$$

- 2 En faisant tendre d vers 0 : $c_p dT + 1/2 dv^2 = 0$
 par différentiation : $dv^2 = 2 v dv$
 enfin (conséquence de la relation de R. MAYER) : $c_p =$
 d'où l'équation demandée : $dT + v dv = 0$
- 3 L'identité thermodynamique (représentation enthalpique)
 s'écrit (avec les grandeurs massiques : s entropie, v volume, h enthalpie **massiques**) $dh = T ds + v dP$
N.B. ne pas confondre, dans ce qui suit, le volume massique v et la vitesse v !
 Pour un écoulement isentropique ($ds = 0$) : $dh = v dP$
 La deuxième loi de JOULE donne : $dh = c_p dT = dT$
- La pression P et le volume massique v d'un gaz parfait $MPv = RT$
 sont reliées par l'équation d'état :
 par différentiation : $M(v dP + P dv) = R dT$
 d'où : $v dP = dT - P dv$
 en reportant dans
 l'identité thermodynamique
 (écoulement isentropique) : $c_p dT = dT = v dP = dT - P dv$
 d'où : $dT = -P dv = - dv$
 après simplification par R et M : $= -(\gamma - 1)$
- puisque l'inverse de la masse
 volumique est le volume massique : $\rho v = 1 \Rightarrow$
 $v d\rho + \rho dv = 0$
 et donc : $= -$
 en conclusion : $= (\gamma - 1)$
- 4 La densité de courant de masse dans
 la canalisation est donnée par : $j = \rho v$
 Le flux de masse à travers une
 section d'abscisse x s'écrit :
 Ce flux est nécessairement uniforme
 en régime permanent : $\Phi(x) = j(x) S(x) = \rho(x) v(x) S(x)$
- $\rho(x) v(x) S(x) = C_{te}$
 d'où : $d \ln(\rho) + d \ln(v) + d \ln(S) = 0$
 $+ + = 0$
 et donc :

5 La variation relative de l'aire S de la section peut être calculée à partir de cette dernière relation :

or :

Enfin l'équation obtenue à la question E. 2 :

peut être écrite à l'aide de la célérité du son c dans le milieu (signification physique de la grandeur c) :

$$c^2 =$$

puis, en introduisant le nombre de MACH :

et en reportant dans l'expression de :

N.B. Cette formule très importante, est indépendante de l'hypothèse sur la nature du fluide (que l'on a assimilé à un gaz parfait) ; elle peut être démontrée dans le cas d'un fluide réel.

Il vaut mieux écrire la relation obtenue sous la forme suivante :

qui montre comment varie la vitesse du fluide en fonction des variations de l'aire de la section de la canalisation.

- Si $MH < 1$ écoulement **subsonique**
la vitesse augmente ($dV > 0$) si la canalisation se rétrécit ($dS < 0$),
(et inversement)
- Si $MH > 1$ écoulement **supersonique**
la vitesse augmente si la canalisation s'élargit,
(et inversement)

- Le cas $MH = 1$ correspond à des conditions critiques,

Cela peut être une valeur asymptotique ; le nombre de MACH ne peut atteindre 1 que pour une tuyère convergente de longueur infinie (écoulement subsonique)

Dans une tuyère optimisée (tuyère de LAVAL) la valeur $MH = 1$ n'est atteinte qu'au col (là où la tuyère est la plus étroite) ; la tuyère est subsonique dans sa partie convergente puis supersonique dans sa partie divergente ; dans une telle tuyère (utilisée en particulier pour les fusées) la vitesse augmente d'un bout à l'autre.

E. 6 $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$;

$$M = 2,9.10^{-2} \text{ kg.mol}^{-1} ;$$

$$T = 298 \text{ K} ; \quad \gamma = 7/5$$

$$c = 346 \text{ m.s}^{-1}$$

(célérité du son dans les conditions usuelles)