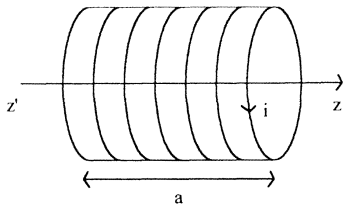
BANQUE PT 2001
Epreuve I.A

A) **Etude de capteurs industriels**

I) Inductance d'une bobine



1) Le modèle est valable si a>>R pour pouvoir négliger les effets de bord.

2) Champ magnétique d'un solénoïde infini : $\overrightarrow{B_\infty}=\mu_0\frac{N}{a}.i.\overrightarrow{u_z}$

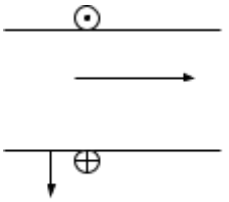
3) Le flux total à travers la bobine est : $\Phi = N.R.\pi R^2 = L_\infty .i$

On en déduit : $L_\infty=\mu_0\frac{N^2}{a}.\pi R^2$

4) Densité volumique d'énergie : $e_m=\frac{B_\infty^2}{2\mu_0}$

On exprime l'énergie totale emmagasinée W de deux façons : $W=\frac{1}{2}L_\infty.i^2=\iiint e_m.d\tau$

Soit : $\frac{1}{2}L_\infty.I^2=\left(\frac{B_\infty^2}{2\mu_0}\right).\pi R^2.a=\frac{\pi R^2.a}{2\mu_0}\left(\mu_0\frac{N}{a}.i.\right)^2 \Rightarrow L_\infty=\mu_0\frac{N^2}{a}.\pi R^2$



5) a) Pour un courant surfacique : $J_S.a=N.i \Rightarrow \overrightarrow{J_s}=\frac{Ni}{a}.\overrightarrow{u_\theta}$

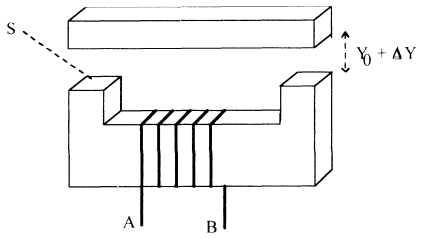
b) Dans l'expression de B_∞, on remplace I en fonction de J_S : $\overrightarrow{B_\infty}=\mu_0.J_s.\overrightarrow{u_z}$

c) La condition aux limites pour $\overrightarrow{B}$ s'écrit : $\overrightarrow{B_2}-\overrightarrow{B_1}=\mu_0\overrightarrow{J_s}\wedge\overrightarrow{n_{1\to2}}$.

Or ici : $\overrightarrow{B_1}=\overrightarrow{B_\infty}=B_\infty.\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{B_1}=0$ avec $\overrightarrow{J_s}=J_s.\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{n_{1\to2}}=\overrightarrow{u_r}$ soit $\overrightarrow{J_s}\wedge\overrightarrow{n_{1\to2}}=-J_s.\overrightarrow{u_z}$

Les conditions aux limites sont donc vérifiées.

II) Capteur inductif simple



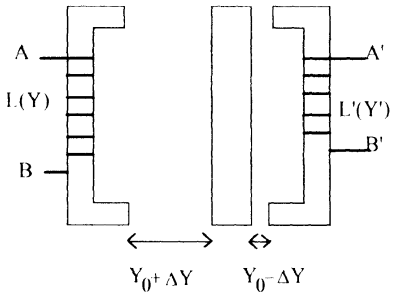
D'après l'énoncé : $L=K\frac{N^2S}{2Y}=K\frac{N^2S}{2(Yo+\Delta)}=K\frac{N^2S}{2Yo(1+\varepsilon)}$

avec $\varepsilon=\frac{\Delta Y}{Yo}$

On fait un développement limité de $(1+\varepsilon)^{-1} = 1- \varepsilon$

Soit : $L==K\frac{N^2S}{2Yo}(1-\varepsilon)$ ou $L=Lo(1-\varepsilon)$

III) Capteur inductif double



1) Contrairement à l'énoncé notons :

L(Y) = Lo + ΔL et **L'(Y) = Lo + ΔL'**

Avec Y = Yo + ΔY et Y' = Yo - ΔY, il est clair que ε' =- ε.

Par conséquent : $L=\frac{Lo}{(1+\varepsilon)}$ et $L'=\frac{Lo}{(1-\varepsilon)}$

2) Avec u = A(ΔL'- ΔL), il vient :: $u=A\left(\frac{Lo}{1-\varepsilon}-\frac{L_0}{1+\varepsilon}\right)$

3) a) Avec un développement limité $u=2ALo.\varepsilon$

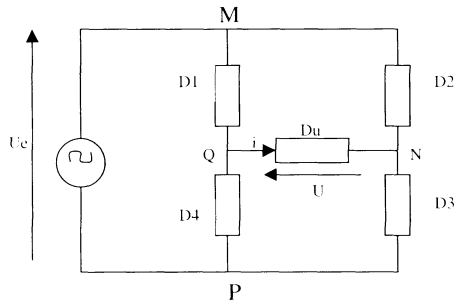
b) Si on fait un développement limité à un ordre supérieur, on obtient : $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3$ et

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3 \Rightarrow \frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}=2x+2x^3$

Le premier terme négligé est donc $2\varepsilon^3$.

c) La sensibilité est définie par : $\sigma=\leq\left|\frac{u}{\Delta Y}\right|$ soit $\sigma=\frac{AKN^2S}{Yo^2}$

IV) Pont de Wheatstone en régime sinusoïdal forcé



1) Le générateur de Thévenin équivalent entre Q et N est tel que :
· sa fem $\underline{E}_{TH}$ soit égale à la ddp entre les points Q et N lorsque D_u est enlevé
· son impédance interne $\underline{Z}_{TH}$ est égale à l'impédance équivalente entre les points Q et N lorsque D_u est enlevé.

En l'absence de D_u appelons :
i_1 le courant dans la branche MQP et
i_2 le courant dans la branche MNP.

On a : $\underline{i}_1=\frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_4}$ et $\underline{i}_2=\frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}$

Et : $V_Q - V_N = -\underline{Z}_1.\underline{i}_1 + \underline{Z}_2.\underline{i}_2 \Rightarrow \underline{E}_{TH}=\left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}-\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}4}\right)\underline{u}_e$ ou $\underline{E}_{TH}=\frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_4-\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{(\underline{Z}_1+\underline{Z}4)(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3)}.\underline{u}_e$

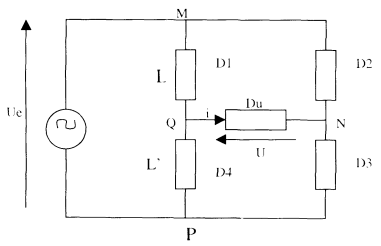
L'impédance $\underline{Z}_{TH}$ est égale à $\underline{Z}_1 // \underline{Z}_4$ en série avec $\underline{Z}_2 // \underline{Z}_3$ soit : $\underline{Z}_{TH}=\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}4}{\underline{Z}_1+\underline{Z}4}+\frac{\underline{Z}_2+.\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}$

2) a) En remplaçant le circuit par le générateur de Thévenin équivalent, il vient : $\underline{I}_m=\frac{\underline{E}_{TH}}{\underline{Z}_{TH}+\underline{Z}_u}$

Soit : $\underline{I}_m=\frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_4-\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2\underline{Z}_3(\underline{Z}_1.+\underline{Z}_4)+\underline{Z}_1\underline{Z}_4(\underline{Z}_2.+\underline{Z}_3)+\underline{Z}_u(\underline{Z}_1+\underline{Z}_4)(\underline{Z}_2.+\underline{Z}_3)}\underline{U}_e$

b) Il est clair que $\underline{I}_m = 0$ si $\underline{Z}_2\underline{Z}_4-\underline{Z}_1\underline{Z}_3=0$

V) Conditionneur du capteur double



1) Dans le cas envisagé : $\underline{Z}_1 = jL\omega$; $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = R$; $\underline{Z}_4 = jL'\omega$;

$\underline{Z}_u = R_u$. et $\underline{u} = R_u.\underline{i}$.

Donc : $\underline{U}_m=\frac{R.j\omega(L'-L)R_u.U_{em}}{j\omega R^2(L+L')-2RLL'\omega^2+2j\omega RR_u(L+L')}$

$$\underline{U}_m = \frac{(L'-L)R_u.U_{em}}{2(L+L')\left(\frac{R}{2}+R_u+j\omega\frac{LL'}{L+L'}\right)}$$

Soit :

On obtient l'expression de l'énoncé avec : $A=R_u+\frac{R}{2}$; $B=\frac{LL'}{L+L'}\omega$; $Num=R_u.U_{em}$

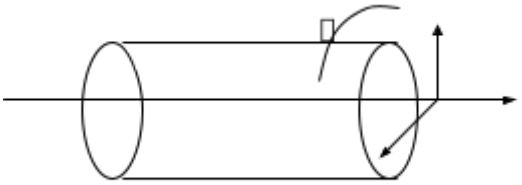
$$\underline{U}_m=\frac{(L'-L)U_{em}}{2(L+L')\left(1+\frac{R}{2R_u}+j\omega\frac{LL'}{R_u(L+L')}\right)}$$

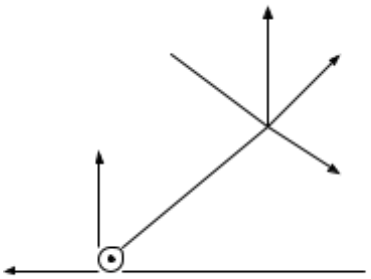
2) a) $\underline{U}_m$ s'écrit auusi : avec :

$\frac{R}{2R_u}=5.10^{-3}<<1$ et $\omega\frac{LL'}{R_u(L+L')}=5.10^{-10}<<1$ $\Rightarrow$ $\underline{U}_m\cong\frac{(L'-L)}{2(L+L')}.U_{em}$

b) Avec $L=L_o(1-\varepsilon)$ et $L'=L_o(1+\varepsilon)$ $\underline{U}_m\cong\frac{2L_o.\varepsilon}{2.2L_o}.U_{em}$ ou $\underline{U}_m\cong\frac{\Delta Y}{2Y_o}.U_{em}$ et $u\cong\frac{\Delta Y}{2Y_o}.U_{em}.\cos(\omega t)$

B) Etude d'un ralentisseur électromagnétique





1) Le champ électromoteur vaut :

$\overrightarrow{E_m}=\vec{v}\wedge\vec{B}$ avec :

$\vec{v}=\omega.r.\vec{e}_\theta$ et $\vec{B}=B.\cos\theta.\vec{e}_r-B.\sin\theta.\vec{e}_\theta$

D'où :

$$\vec{E}_m=\omega.r.\vec{e}_\theta\wedge\left(B.\cos\theta.\vec{e}_r-B.\sin\theta.\vec{e}_\theta\right)\Rightarrow$$

$$\vec{E}_m=-\omega.r.B.\cos\theta.\vec{e}_z$$

2) Avec $\vec{j}=\sigma.\overrightarrow{E_m}$, on a donc : $\vec{j}=-\sigma.\omega.r.B.\cos\theta.\vec{e}_z$

Les lignes de courant sont parallèles à Oz :

· vers les $z<0$ pour $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

· vers les $z>0$ pour $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$

3) Le courant circule dans un sens pour un demi-cylindre et dans le sens opposé pour l'autre demi-cylindre.

Par conséquent : $I=\iint_{1/2\,cylindre} j.ds$ avec $ds = r.dr.d\theta$

Soit : $I=\sigma B\omega.\int_0^a r_r^2.dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta.d\theta$ $\Rightarrow$ $I=\frac{2}{3}\sigma B\omega.a^3$

4) Considérons deux éléments de courant de longueur L de section ds = r.dr.dθ donc de volume

dτ = L.r.dr.dθ , symétriques par rapport à l'axe du cylindre..

· Sur chaque élément s'exerce la force :

$\overrightarrow{dF}=\pm\vec{j}d\tau\wedge\vec{B}=\pm jB.d\tau\left[\vec{k}\wedge\left(\cos\theta.\vec{e}_r-\sin\theta.\vec{e}_\theta\right)\right]=\pm jB.d\tau.\left(\cos\theta.\vec{e}_\theta+\sin\theta.\vec{e}_r\right)$

Le signe $\pm$ correspondant à l'un ou l'autre des deux éléments.

Pour ces deux éléments θ' = θ + π et donc cos θ' = -cos θ et sin θ' = -sin θ .

L'expression mathématique des deux forces est la même.
Par conséquent, les deux forces sont égales et opposées. **La résultante des forces est donc nulle**.

· On calcule ensuite le moment résultant des forces en considérant le moment élémentaire sur l'un des éléments précédents : $\overrightarrow{d\Gamma}=r\vec{e}_r\wedge\left(-|j|.Bd\tau.\cos\theta.\vec{e}_\theta\right)=r|j|Bcos\theta.d\tau.\left(-\vec{k}\right)$ sur l'élément tel que $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

Avec : $|j|=\sigma.\omega.r.B.\cos\theta$ et dτ = L.r.dr.dθ , on obtient : $d\Gamma=\sigma.B^2.\omega.r^2.\cos^2\theta.L.r.dr.d\theta$

Et $\Gamma=2\sigma.B^2.\omega.L\int_0^a r^3.dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2.d\theta \quad\Rightarrow\quad \vec{\Gamma}=-\frac{\pi}{4}\sigma.B^2.\omega.La^4.\vec{k}$

Le système réagit en s'opposant aux actions extérieures.

5) La puissance dissipée par effet joule vaut : $P_J=\iiint\frac{1}{\sigma}.j^2.d\tau$

Avec $j=\sigma.\omega.B.r.\cos\theta$ et dτ = L.r.dr.dθ ⇒ $P_J=\sigma.B^2\omega^2.L\int_0^a r^3.dr\int_0^{2\pi}\cos^2\theta.d\theta$

Soit : $P_J=\sigma.B^2\omega^2.L.\frac{a^4}{4}.\frac{2\pi}{2}$ ou $P_J=\frac{\pi}{4}\sigma.B^2\omega^2.L.a^4.$

La puissance des actions électromagnétique est $P_m=\Gamma.\omega$ soit $P_m=\frac{\pi}{4}\sigma.B^2\omega^2.L.a^4.=P_J$

Cette relation traduit la conservation de l'énergie : la puissance mécanique fournie pour faire tourner le cylindre est entièrement dissipée sous forme de chaleur par effet Joule.

6) L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

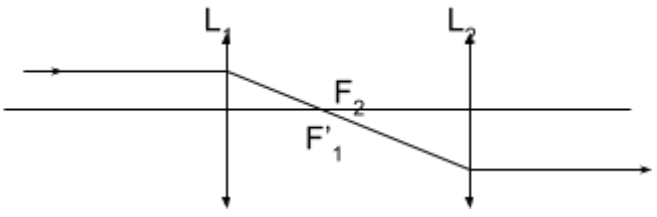
$J.\ddot{\theta}=-\frac{\pi}{4}\sigma B^2La^4.\omega=-\alpha.\omega$ en posant $\alpha=\frac{\pi}{4}\sigma B^2La^4$

Cette équation s'intègre en : $\omega=\omega_0.\exp\left(-\frac{\alpha}{J}.t\right)$ ou $\omega=\omega_0.\exp\left(-\frac{\pi}{4}\frac{\sigma B^2La^4}{J}.t\right)$

Ce phénomène physique est utilisé pour le freinage de certains véhicules (camions, cars …).

C) Interféromètre de Michelson

1) Pour un système afocal, le foyer image F'_1 de L_1 et le foyer objet F_2 de L_2 sont confondus.



Le schéma ci-contre montre que : $\frac{d}{f'_1}=\frac{d'}{f'_2}$

Soit : $d'=d\frac{f'_2}{f'_1}$ Numériquement : $d'=30.d$

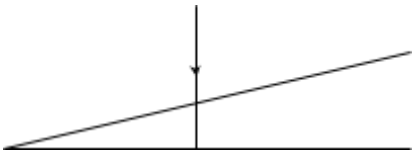
Ce dispositif permet d'élargir un faisceau lumineux (celui d'un laser par exemple).

2) a) La différence de marche est la même pour tous les couples de rayons qui interfèrent.
L'éclairement est uniforme en tous les points du plan d'observation.

La différence de marche entre deux rayons est $\delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$ ($\frac{\lambda}{2}$ correspond au déphasage supplémentaire de π). L'éclairement vaut alors : $\varepsilon = 2.\varepsilon_0\left(1+\cos 2\pi\frac{2e+\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right)$ soit $\varepsilon = 2.\varepsilon_0\left(1-\cos\frac{4\pi e}{\lambda}\right)$

b) Si e varie, ε passe par des valeurs maximales $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ et minimales $\varepsilon = 0$.
Il n'est pas possible de repérer la position correspondant à e = 0 car il existe un très grand nombre (sinon une infinité) de positions où l'éclairement est le même.
Par contre, en lumière blanche, seule la position e = 0 donne une frange noire puisque c'est la seule valeur de e qui donne un cosinus égal à 1pour toutes les valeurs de λ .

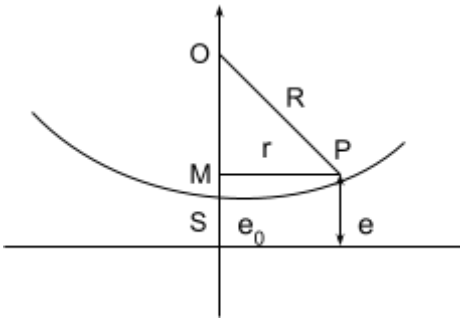
3) Franges du coin d'air
Conditions d'observation :
· les franges sont localisées sur le coin d'air
· pour les observer sur un écran, il faut utiliser une lentille convergente de telle façon que l'écran soit le conjugué du plan de la lame d'air
· l'angle α doit être petit



L'épaisseur du coin d'air à la distance x de l'arête du dièdre est y = α.x et la différence de marche $\delta = 2.\alpha.x$

L'interfrange i est tel que $i = \Delta x$ avec $\Delta(\delta) = 2\alpha\Delta x = 2\alpha.i = \lambda \Rightarrow$ $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$

4) a) Soit O le centre de la calotte sphérique que constitue le miroir.
Notons x la distance MS (S = sommet de la calotte sphérique.
Dans le triangle MPO : $R^2 = (R-x)^2 + r^2$
x étant petit, on développe cette expression et on néglige le terme x^2.



Soit : $0 = r^2 - 2Rr \Rightarrow$ $x = \frac{r^2}{2R}$ et $e = e_0 + \frac{r^2}{2R}$

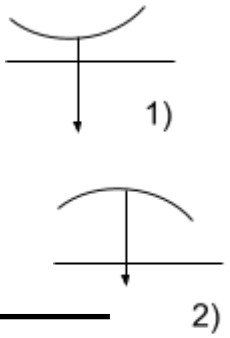
b) La différence de marche est $\delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$ soit : $\delta = 2e_0 + \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$
Le dispositif est à symétrie sphérique autour de y'y.
Les franges d'égale intensité sont telles que δ = cte donc r = cte.
Les franges sont donc des anneaux centrés sur y'y et localisés au voisinage de M'_2 (plan du coin d'air).

c) · Au centre, l'ordre d'interférence p_0 est tel que $\delta = p_0.\lambda$ soit : $p_0 = \frac{2e_0}{\lambda} + \frac{1}{2}$

· L'anneau n° 1 est tel que : $p_1\lambda = 2e_0 + \frac{R_1^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$

· L'anneau n° k est tel que : $(p_1 - k + 1)\lambda = 2e_0 + \frac{R_k^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$

On en déduit : $(k-1)\lambda = \frac{R_k^2 - R_1^2}{R}$ soit $R_k = R_1\sqrt{1+\frac{(k-1)\lambda R}{R_1^2}}$



d) Dans le cas 1) , lorsque l'on déplace le miroir, l'épaisseur e_0 que l'on a au centre à l'instant t = 0, se trouve à une distance r du centre à un instant postérieur t.
Par conséquent, les anneaux s'écartent du centre.
Dans le cas 2) l'épaisseur e que l'on a à l'instant t = 0 en un point à la distance r du centre, se retrouve au centre à l'instant t postérieur.
Par conséquent les anneaux convergent vers le centre.

En résumé : Cas 1) : les anneaux s'écartent du centre
Cas 2) : les anneaux se rapprochent du centre

e) D'après la question C), on a :

$$R_k^2 = R_1^2 + (k-1)\lambda R \quad \text{et} \quad R_{k+1}^2 = R_1^2 + k.\lambda.R \quad \Rightarrow \quad R_{k+1}^2 - R_k^2 = \lambda.R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_{k+1}^2 - R_k^2}{\lambda}$$

5) Analyse d'un défaut de planéité d'une surface métallique réfléchissante

a) Les surfaces S'_{plane} et M_1 sont parallèles si <u>l'éclairement de l'écran est uniforme</u>.
On s'assurer du contact optique entre M_1 et S'_{plane} , <u>on réalise l'étude en utilisant de la lumière blanche</u> .

b) La différence de marche entre deux points appartenant à deux courbes sombres adjacentes est égale à λ., elle est égale à λ/2 entre un point d'une courbe sombre et un point d'une courbe claire adjacente.
La figue d'interférences est la preuve qu'il existe un défaut de planéité dans la surface polie S.



La différence de marche entre le point central et la zone périphérique vaut $\delta = 4\times\lambda + \frac{\lambda}{2}$ et l'épaisseur correspondante du défaut de planéité est $e = \frac{\delta}{2}$.

<u>Il existe un défaut de planéité dans la surface S d'épaisseur</u> $\delta e = \frac{9}{4}\lambda$