

Physique numérique TP n°2

Soit à résoudre l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixe. Considérons le système:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 100x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 100(2-x) & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases} \\ u(0, t) = u(2, t) = 0 \end{cases}$$

Prendre $\kappa = 0.13$, $c = 0.11$, $\rho = 7.8g/cm^3$, $\Delta x = 0.25$. Δt sera donné par les conditions de stabilité définies par l'inéquation: $r = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$. La solution analytique est donnée par:

$$u_{exact}(x, t) = 800 \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(2n+1)^2} \times \cos \frac{\pi(2n+1)(x-1)}{2} \times e^{-0.3738(2n+1)^2 t}$$

1. En utilisant la méthode des différences finies explicite, résoudre l'équation de la chaleur ci-haut en développant un programme matlab. Traiter les cas $r < 1/2$ et $r > 1/2$. Que constatez-vous? (graphe de la solution explicite) .

2. Utiliser maintenant la méthode de Crank- Nicolson (voir programme en annexe) et faites

varier le r . Que constatez-vous?

3. Comparaisons des méthodes explicite u_{app} et analytique exacte u_{exact}

(a) Programmer d'abord la solution exacte **u_{exact}** avec $\infty=100$)

(b) Comparer, en fonction de r , graphiquement $u_{exact}(0.25, t)$ et $u_{app}(0.25, t)$ puis $u_{exact}(0.75, t)$ et $u_{app}(0.75, t)$

(c) Même question pour $u_{exact}(x, 0.93)$ et $u_{app}(x, 0.93)$ puis $u_{exact}(x, 1.96)$ et $u_{app}(x, 1.96)$

4. Conclure.

Annexe : programme matlab de la méthode de Crank-Nicolson résolvant l'équation de la chaleur.

```
%=====
%***** Code MATLAB pour résoudre l'équation de la chaleur*****
%***** du/dt = D d²u/dx² par la méthode de Crank-nicolson*****
%*****Par M. Charafi, FPK, *****
%Date: 15/05/2015
%=====

clc; clear;
k=0.13;c=0.11;
p=7.8;dx=0.25;
%r=1/4;
r=0.25;
dt=dx*dx*c*p*r/k;
%pause
Tmax=100*dt;
a=0;b=2;
cla=0;clb=0;
nx=(b-a)/dx;
nt=Tmax/dt;
%pause
x=0:dx:b;
t=0:dt:Tmax;
for i=2:nx-2
N1(i)=0;
N2(i)=0;
end
N1(1)=-r*cla;
N1(nx-1)=-r*clb;
N2(1)=r*cla;
N2(nx-1)=r*clb;

for i=1:nx-1

M1(i,i)=2+2*r;
M2(i,i)=2-2*r;
end
for i=1:nx-2
M1(i,i+1)=-r;
M1(i+1,i)=-r;
M2(i,i+1)=r;
M2(i+1,i)=r;

end
for i=1:1+nx/2
C0(i)=100*(i-1)*dx;
end
%disp(u)
%pause
for i=1+nx/2:nx+1
C0(i)=100*(2-(i-1)*dx);
end
for i=1:nx-1
h(i)=C0(i+1); % correction
end
j=1;
%disp(h)
%pause
%disp(h')
```

```

%pause
h=h';
%pause
I=eye(nx-1);
while(j < nt + 2)
    for i=1:nx-1
        w(i,j)=h(i);
        %disp(w)
        %pause
    end
    %pause
    h=(M1\I) * (M2*h+N2'-N1');
    j=j+1;
end
%disp(w)
%pause
for i=nx:-1:2
for j=nt+1:-1:2
    u(i,j)=w(i-1,j);
end
end
for j=1:nt+1
    u(1,j)=0;
    u(nx+1,j)=0;
end
% Ajouter cette boucle de la ligne 84 à la ligne 91
for i=1:1+nx/2
    u(i,1)=100*(i-1)*dx;
end
%disp(u)
%pause
for i=1+nx/2:nx+1
    u(i,1)=100*(2-(i-1)*dx);
end
mesh(t,x,u)
% Pour tracer la courbe à quelques instants particuliers ajouter ces lignes
figure
plot(x,u(:,1),'-',x,u(:,5),'-',x,u(:,25),'-',x,u(:,100),'-')
title('Temperature avec la methode de crank nicolson')
xlabel('X')
ylabel('T')

```