

FINANCE DE MARCHÉ ET THEORIE DU
PORTEFEUILLE

PR. ABDELMAJID IBENRISSOUL
MME HAJAR MOUATASSIM

4ÈME ANNÉE ENCG - C

Les marchés financiers sont des lieux où se rencontrent l'offre et la demande d'un bien ou d'un service, particulier, en l'occurrence l'argent, matérialisé par des titres appelés valeurs mobilières ou actifs financiers.

En effet, c'est sur ces marchés que se rencontrent les agents économiques excédentaires, et ceux qui ont un besoin de financement, pour négocier entre eux leurs excédents de capitaux et leurs besoins en capitaux à moyen et long terme.

Il existe plusieurs types de valeurs mobilières dont les plus importantes sont les actions et les obligations. Les actions, sont des parts de capital des entreprises. Elles se caractérisent par des rendements variables, dans la mesure où leurs cours varient. De ce fait, leurs détenteurs sont exposés au risque de voir leurs cours baisser. C'est la raison pour laquelle, on considère que le placement (*investissement*) dans les actions se fait selon un arbitrage rendement/risque.

Les obligations, quant à elles, sont des emprunts financiers et ne génèrent aucun risque à leurs détenteurs. Le rendement des obligations est tout simplement un intérêt perçu par le détenteur. Sur les marchés financiers, on distingue :

- Les offres primaires, c-à-d la vente des valeurs émises pour la première fois en faveur des investisseurs.
- Les offres secondaires, c-à-d la revente de valeurs déjà émises.

A côté de ces deux principaux titres, il existe des valeurs mobilières que l'on appelle les options. Ces dernières sont des contrats dont la valeur est « *dérivée* » du prix d'une autre valeur mobilière (*action, obligation, etc.*). Les options sont appelées, d'ailleurs, produits dérivés.

Les marchés financiers revêtent un grand intérêt pour la décision d'investissement. En effet, plusieurs théories et techniques de décision d'investissement sont nées et se sont développées grâce aux marchés financiers. Les plus importantes de ces théories et techniques sont la diversification, la demande d'actifs et la théorie des options.

I-

I.1. LA DIVERSIFICATION

Tout le monde connaît l'adage « il ne faut pas faire tous ses œufs dans le même panier ». Cet adage populaire s'applique parfaitement au placement – investissement dans les valeurs mobilières. La diversification permet de réduire

le risque par la constitution d'un portefeuille dont le risque est inférieur à la somme des risques de ses composantes.

Mais, avant d'exposer le principe de la diversification, nous allons revenir sur les notions de rendement et de risque d'un actif financier

I-

I.1.

I.1.1. RENDEMENT D'UN ACTIF

On distingue entre rendement périodique et rendement au cours d'une période.

▪ *Rendement périodique :*

Le rendement périodique (*quotidien, hebdomadaire, mensuel, annuel*) d'un actif se calcule comme suit :

$$R_t = \frac{(V_t - V_{t-1}) + D_t}{V_{t-1}}$$

Avec :

V_t = Prix d'un actif à la fin de la période t

V_{t-1} = Prix d'un actif à la fin de la période $t-1$

D_t = Le flux monétaire payé par l'actif pendant la période de détention allant de $t-1$ à t .

Cette formule sert à calculer le rendement réalisé (*ex post*) d'un titre alors que c'est le rendement espéré qui intéresse un investisseur donné.

▪ *Rendement espéré d'un actif au cours d'une période donnée :*

Soit R_k la valeur du rendement au scénario k et p_k sa probabilité de réalisation.

Le rendement espéré d'un actif a_i est la moyenne pondérée (*par les probabilités*) des valeurs des rendements possibles.

$$m(R_i) = \sum_{k=1}^s p_k \times R_k$$

Le rendement espéré d'un portefeuille, composé de plusieurs actifs, est :

$$E(R_p) = x_1 \times m(R_1) + x_2 \times m(R_2) + \dots x_n \times m(R_n) = \sum_{i=1}^n x_i \times E(R_i)$$

Avec :

n = le nombre de titres inclus dans le portefeuille;

$m(R_i)$ = le rendement de l'actif i inclus dans le portefeuille

x_i = la proportion de la richesse totale de l'investisseur investie dans l'actif i .

I-

I.1.

I.1.1.

I.1.2. MESURE DU RISQUE D'UN ACTIF :

La variance, et de façon précise l'écart type (la racine carrée de la variance), est souvent utilisée comme mesure du risque d'un actif financier.

$$\sigma_i^2 = \sum_{k=1}^s p_k [R_k - m(R_i)]^2$$

La dépendance entre deux actifs est souvent mesurée par la covariance ou encore le coefficient de corrélation linéaire. La covariance entre deux actifs i et j se calcule comme suit :

$$\text{cov}(R_A, R_B) = \sigma_{AB} = \sum_{j=1}^m p_j (R_{Aj} - R_{Am})(R_{Bj} - R_{Bm})$$

- R_A et R_B : les rendements respectifs des actions A et B (*considérés comme variables aléatoires*) ;
- p_j : la probabilité de réalisation du scénario j ;
- R_{Aj} : le rendement de l'action A pendant le scénario j ;
- R_{Am} : le rendement moyen de l'action A ;
- R_{Bj} : le rendement de l'action B pendant le scénario j ;
- R_{Bm} : le rendement moyen de l'action B .

Lorsque les rendements de deux actifs varient dans le même sens (*resp. dans le sens contraire*) la covariance sera positive (*resp. négative*).

Le coefficient de corrélation entre deux actifs i et j est :

$$\rho_{i,j} = \frac{\text{COV}(R_i, R_j)}{\sqrt{\text{Var}(R_i) \times \text{Var}(R_j)}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \times \sigma_j}$$

La variance de rendement d'un portefeuille contenant n actifs est :

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} \sum x_i x_j \sigma_{ij}$$

Nous allons maintenant présenter quelques exemples qui montrent l'intérêt de la diversification dans la réduction des risques liés aux actifs.

Exemple 1

Considérons deux actions A et B , se caractérisant par les informations suivantes, dans lesquelles une entreprise souhaiterait investir :

Actions	$R(S_1)$	$R(S_2)$	$R(S_3)$	$R(S_4)$
A	900	600	300	0
B	-300	0	300	600
Prob	0,1	0,2	0,3	0,4

Ces données permettent d'obtenir :

Actions	R_m	V_m
A	300	300
B	300	300

$R_{Am} = R_{Bm}$ et $\sigma_A = \sigma_B$ montre que pris individuellement, ces deux actions présentent le même rendement et le même risque. Dans ce cas, il est très difficile d'opter pour l'une d'elles. Une solution plus intéressante que les deux actions A et B consiste à en faire une combinaison, par exemple, à en former une action C de la forme $C = 0,5.A + 0,5.B$.

L'action C a les caractéristiques suivantes :

$C = 0,5 (A + B)$	300	300	300	300
Prob	0,1	0,2	0,3	0,4
$R_m (C)$	300			
$V_m (C)$	0			

On voit bien que l'action C a conservé à l'investisseur le même rendement que celui des autres actions, mais en éliminant le risque qu'ils comportaient.

Généralement, la diversification conduit à réduire le risque, et non pas à l'éliminer carrément. Par ailleurs, elle permet de conserver certaines actions, bien qu'elles puissent sembler, à priori inintéressantes. Pour s'en convaincre considérons l'exemple suivant.

Exemple 2

Dans cet exemple, on considère trois actions caractérisées par les informations suivantes :

Actions	Rendement selon le scénario i			
	$R(S_1)$	$R(S_2)$	$R(S_3)$	$R(S_4)$
A	1000	2000	3000	4000
B	2000	1500	2500	3000
C	2000	2500	100	500
Prob	0,1	0,2	0,3	0,4

Nous obtenons alors :

Actions	R_m	V_m
A	3000	1000
B	2450	790,57
C	930	2274,4

Si l'on prend ces actions individuellement, on sera conduit à éliminer l'action **C**, parce qu'elle est dominée par les actions **A** et **B**.

En effet, on a :

- $R_m(A) > R_m(C)$ et $\sigma(A) < \sigma(C)$
- $R_m(B) > R_m(C)$ et $\sigma(B) < \sigma(C)$

Regardons maintenant ce qui se passera si l'on procède au tableau des actions diversifiées suivant :

Actions	Rendement selon le scénario i				R_m	V_m
	$R(S_1)$	$R(S_2)$	$R(S_3)$	$R(S_4)$		
0,5.A + 0,5.B	1500	1750	2750	3500	2725	810,092587
0,5.B + 0,5.C	2000	2000	1250	1500	1575	1455,59266
0,5.A + 0,5.C	1500	2250	1500	2000	1850	1188,48643
Prob	0,1	0,2	0,3	0,4		

On remarque que la diversification a permis de conserver une partie de l'action **C**, bien que cette dernière ait été dominée par les actions **A** et **B**. L'intérêt de

cette opération réside dans le fait qu'elle réduit la dispersion du rendement de la nouvelle action (*diversifiée*) autour de sa moyenne.

Dans la réalité, les actions agissent les unes sur les autres. Aussi, lorsqu'il y a diversification, peut-on mesurer ces interactions à l'aide de la covariance.

Les calculs, à partir du deuxième exemple, permettent d'obtenir, pour les deux premières actions :

<i>Scénarios</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
Probabilités	0,1	0,2	0,3	0,4
$R_{Aj} - R_{Am}$	-2000	-1000	0	1000
$R_{Bj} - R_{Bm}$	-450	-950	50	550
$p_j \cdot (R_{Aj} - R_{Am}) \cdot (R_{Bj} - R_{Bm})$	90000	190000	0	220000

<i>Cov (R_A, R_B)</i>
500000

En reproduisant la même procédure, nous obtenons le tableau suivant des covariances :

<i>Cov (R_A, R_B)</i>	<i>Cov (R_A, R_C)</i>	<i>Cov (R_B, R_C)</i>
500000	-565000	-900000

Intuitivement, on peut dire que pour deux actions *A* et *B*, dont les rendements *R_A* et *R_B* sont aléatoires :

- une valeur fortement positive de la covariance est une indication qu'il existe un lien fort entre les actions. En d'autres termes, leurs rendements augmentent simultanément ou baissent simultanément;
- une valeur de la covariance proche de 0 montre que les valeurs de l'un des deux rendements sont proches de leur valeur moyenne quand l'autre

prendra des valeurs élevées (*positives ou négatives*). Elle peut signifier une absence de relation linéaire seulement entre les rendements des deux actions. Toutefois, une relation non linéaire peut exister.

- Une valeur de la covariance négative, signifie que les deux actions ont des rendements qui varient en sens inverse.

Toutefois, pour mesurer l'intensité du lien qui peut exister entre deux actions, on utilise l'indicateur du coefficient de corrélation ρ . Ce dernier est la forme standardisée de la covariance.

On a $-1 \leq \rho_{AB} \leq 1$

- Si $\rho_{AB} = -1$, il existe une relation négative parfaite entre les deux actions ;
- Si $\rho_{AB} = 1$, il existe une relation parfaite entre les deux actions.
- Si $\rho_{AB} = 0$, il n'y a pas de relation linéaire entre les deux actions ;

Dans notre cas, nous obtenons :

ρ_{AB}	ρ_{AC}	ρ_{BC}
0,63	-0,25	-0,50

La diversification est notamment intéressante pour les individus qui font des placements – investissements sur les marchés boursiers. En effet, elle s'avère comme une stratégie qui consiste à acquérir un portefeuille d'actions dont les valeurs ne devraient pas évoluer dans le même sens. Ceci leur permet de réduire les risques encourus par les différentes actions constituant le portefeuille.

Toutefois, il faut souligner qu'il existe deux types de risque : le risque diversifiable et le risque non diversifiable. .

En effet, le risque d'un actif financier se compose d'un risque que l'on appelle spécifique qui ne dépend que des variations qui affectent le cours de l'actif indépendamment des variations qui affectent les cours des autres actifs. C'est le risque spécifique qui est diversifiable.

L'autre composante du risque d'un actif financier, qui s'appelle risque systématique ou risque de marché est liée à la conjoncture économique dans son ensemble. Ce risque, lié, en fait, aux corrélations associant les rendements des différents actifs financiers est non diversifiable.

Pour formaliser l'avantage de la diversification, considérons n titres non corrélés, dont on construit un portefeuille. La variance de ce dernier s'écrit :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sigma_i^2$$

En simplifiant, c-à-d, en considérant que $x_i = \frac{1}{n}$. En d'autres termes, en investissant la même proportion de revenu dans chacun des titres composant le portefeuille, on obtient :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \cdot \sigma_i^2$$

On remarque que lorsque n tend vers l'infini, la variance du portefeuille tend vers 0 . Mais, la diversification a deux limites :

- 1) Elle permet d'éliminer uniquement le risque spécifique et non le risque systématique ;
- 2) Elle cesse de jouer ce rôle dès que le nombre de titre est important.

La question qui se pose maintenant est la suivante : comment peut-on constituer un portefeuille d'actions afin, sinon d'éliminer le risque diversifiable, du moins le réduire ? Cette question relève de la notion de gestion de portefeuille.

II-

I.2. GESTION DE PORTEFEUILLE

Un gérant de portefeuille se pose deux questions :

- ⊗ De quels titres doit être constitué le portefeuille?
- ⊗ Comment répartir le revenu alloué sur les différentes actions?

En d'autres termes, gérer un portefeuille consiste à choisir une combinaison optimale de titres (actions, obligation, etc.) à détenir, c'est ce que l'on appelle *l'allocation* d'actifs. Ensuite, le gérant procède à la *sélection* des titres et à la détermination de leurs proportions à détenir dans le portefeuille.

La gestion de portefeuille repose sur un certain nombre d'hypothèses :

- Il existe des titres risqués et un titre non risqué ;
- Les rendements R_i des titres risqués sont aléatoires ;
- L'investisseur cherche à maximiser le rendement de son portefeuille ;
- L'investisseur est averse au risque ;
- L'écart type σ_i est une bonne mesure du risque ;
- x_i est la part de l'investissement consacré au titre i .

I.2.

I.2.1. CONSTITUTION D'UN PORTEFEUILLE À DEUX TITRES RISQUÉS

Dans le cas d'un portefeuille à deux titres risqués, on en évalue le rendement et le risque grâce aux formules suivantes :

$$E(R_p) = x_1 \cdot E(R_1) + x_2 \cdot E(R_2)$$

$$\text{Et } \sigma_p^2 = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \sigma_{12} + x_2^2 \sigma_2^2$$

Exemple 1

Considérons l'évolution des rendements des deux titres suivants :

<i>Mois</i>	<i>Titre A₁</i>	<i>Titre A₂</i>
1	-0,0413	0,03412
2	-0,0363	0,03112
3	-0,0313	0,05
4	-0,0263	0,0341
5	0,04561	0,0182
6	0,04986	0,0423
7	0,04159	0,0136
8	0,0458	0,0295
9	0,0457	-0,0454
10	0,0456	-0,05
11	0,0355	-0,05
12	0,05	-0,01

Les rendements espérés des deux titres sont respectivement :

$$E(R_1) = 0,018705 \text{ et } E(R_2) = 0,0081283$$

Pour calculer la covariance et les écarts – types des deux titres, on construit le tableau suivant :

Mois	$R1 - E(R1)$	$R2 - E(R2)$	$(R1 - E(R1)).(R2 - (R2))$	$(R1 - E(R1))^2$	$(R2 - E(R2))^2$
1	-0,060005	0,025991667	-0,00155963	0,0036006	0,000675567
2	-0,055005	0,022991667	-0,001264657	0,00302555	0,000528617
3	-0,050005	0,041871667	-0,002093793	0,0025005	0,001753236
4	-0,045005	0,025971667	-0,001168855	0,00202545	0,000674527
5	0,026905	0,010071667	0,000270978	0,000723879	0,000101438
6	0,031155	0,034171667	0,001064618	0,000970634	0,001167703
7	0,022885	0,005471667	0,000125219	0,000523723	0,000029939
8	0,027095	0,021371667	0,000579065	0,000734139	0,000456748
9	0,026995	-0,053528333	-0,001444997	0,00072873	0,002865282
10	0,026895	-0,058128333	-0,001563362	0,000723341	0,003378903
11	0,016795	-0,058128333	-0,000976265	0,000282072	0,003378903
12	0,031295	-0,018128333	-0,000567326	0,000979377	0,000328636

Il vient alors que :

$$\sigma_1 = 0,037437, \quad \sigma_2 = 0,035753, \quad \sigma_{12} = -0,000717, \quad \rho_{12} = -0,53537$$

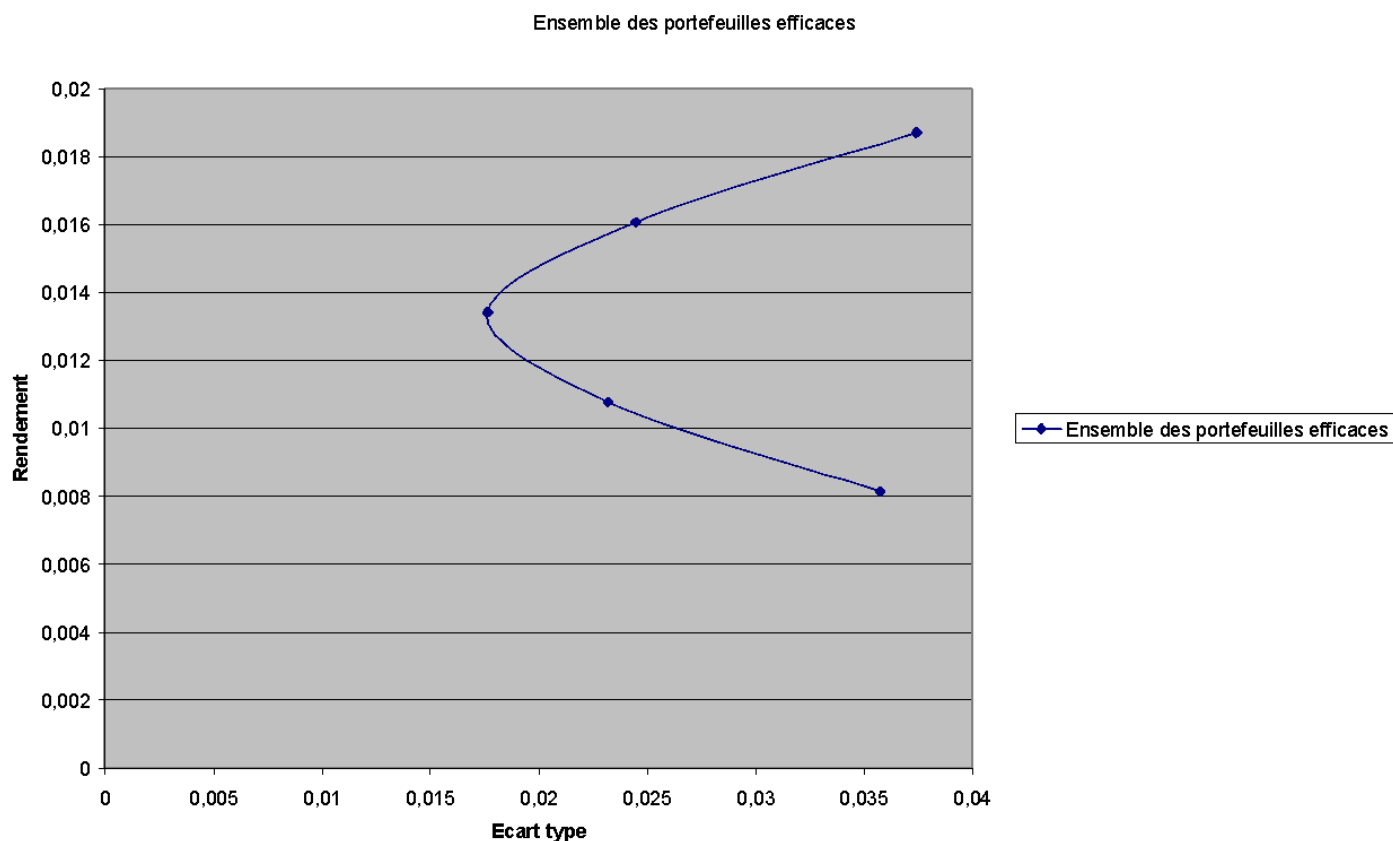
Calculons le rendement et l'écart type des combinaisons suivantes :

Portefeuille	A_1	A_2
1	1,00	0,00
2	0,75	0,25
3	0,50	0,50
4	0,25	0,75
5	0,00	1,00

On peut calculer le rendement espéré et l'écart type des différents portefeuilles que l'on fabrique à l'aide de ces proportions. On obtient alors :

Portefeuille	A_1	A_2	$E(Rp)$	Ecart - type (P)
1	1	0	0,018705	0,03743661
2	0,75	0,25	0,01606083	0,02448505
3	0,5	0,5	0,01341667	0,01765378
4	0,25	0,75	0,0107725	0,02319297
5	0	1	0,00812833	0,03575321

Si l'on reporte le rendement espéré en ordonnée et l'écart type en abscisse, on construit une courbe de toutes les combinaisons possibles.



On peut se demander quelle est la combinaison située sur cette courbe qui offre le risque minimum. Pour la trouver, réécrivons l'expression de la variance du portefeuille :

$$\sigma_p^2 = \sigma_1^2 \cdot x_1^2 + 2 \cdot \sigma_{12} x_1 \cdot x_2 + \sigma_2^2 \cdot x_2^2$$

Comme $x_1 = 1 - x_2$, on peut écrire, en éliminant l'indice :

$$\sigma_p^2 = \sigma_1^2 \cdot x^2 + 2 \cdot \sigma_{12} x \cdot (1 - x) + \sigma_2^2 \cdot (1 - x)^2$$

Pour minimiser la variance du portefeuille on doit d'abord la dériver par rapport à x , ce qui donne :

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x} = 2 \cdot \sigma_1^2 \cdot x + 2 \cdot \sigma_{12} \cdot (1 - x) - 2 \cdot \sigma_{12} \cdot x - 2 \cdot \sigma_2^2 \cdot (1 - x)$$

On doit ensuite mettre cette dérivée égale à zéro, ce qui donne :

$$2.\sigma_1^2.x + 2.\sigma_{12} - 4.\sigma_{12}.x - 2.\sigma_2^2 + 2\sigma_2^2.x = 0$$

Soit enfin :

$$x = \frac{\sigma_2^2 - 2.\sigma_{12}}{2.\sigma_1^2 - 4.\sigma_{12} + 2.\sigma_2^2}$$

En appliquant cette formule à notre exemple, nous trouvons :

$x = 48,5\%$. En d'autres termes, un investisseur qui est risquophobe peut mettre au maximum 48,5% du montant qu'il alloue aux deux titres dans le premier, et au minimum 51,5% dans le second.

▪ Impact de la corrélation sur la diversification

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas tenu compte de l'effet de la corrélation qui existe entre les titres dans la réduction du risque du portefeuille qu'ils composent. Nous allons montrer cet effet à partir de deux exemples.

Exemple 1 :

Considérons les deux titres caractérisés par les données suivantes :

$$E(R_1) = 0,04 \quad ; \quad \sigma_1 = 0,03 \quad \text{Et} \quad E(R_2) = 0,04 \quad ; \quad \sigma_2 = 0,03$$

Formons un portefeuille où les deux titres représentent chacun 50%.

On sait que : $\sigma_p^2 = x_1^2.\sigma_1^2 + 2.x_1.x_2.\sigma_{12} + x_2^2.\sigma_2^2$

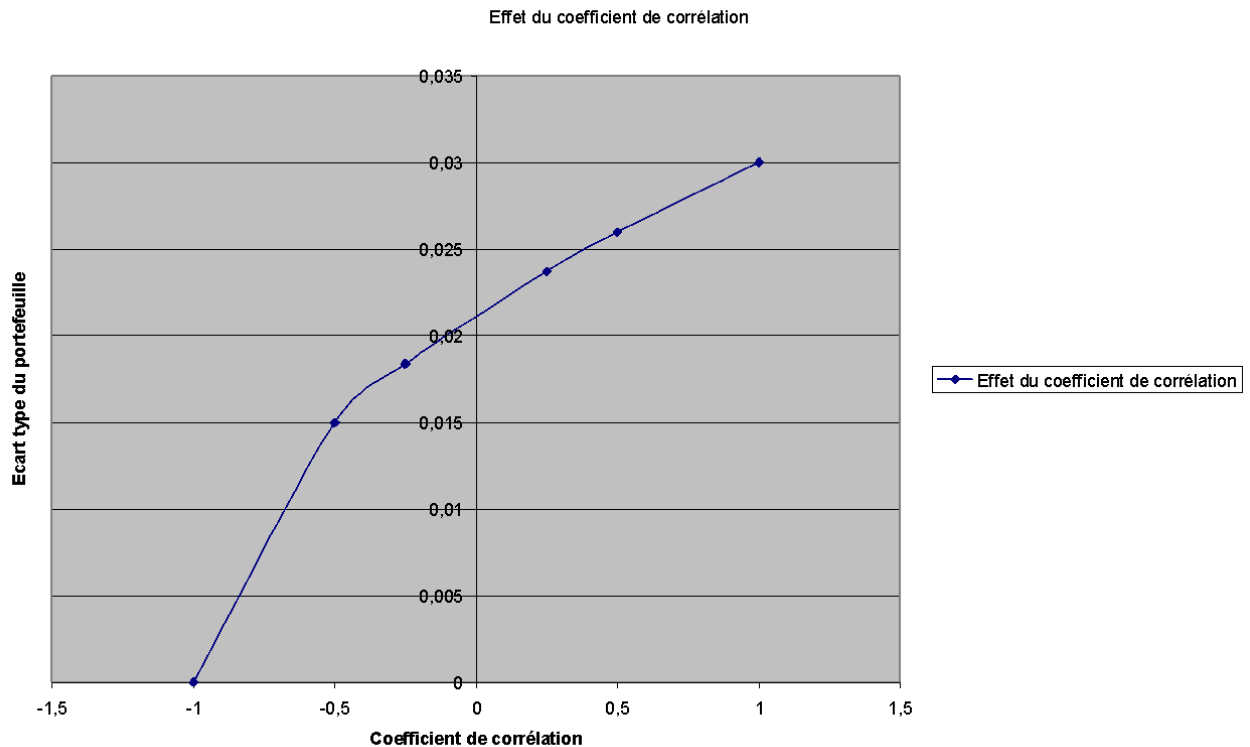
Et que : $\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1.\sigma_2} \Rightarrow \sigma_{12} = \rho_{12}.\sigma_1.\sigma_2$

Par conséquent : $\sigma_p^2 = x_1^2.\sigma_1^2 + 2.x_1.x_2.\rho_{12}.\sigma_1.\sigma_2 + x_2^2.\sigma_2^2$

En faisant varier ρ , on obtient alors les valeurs suivantes :

<i>Rho</i>	<i>Variance (P)</i>	<i>Ecart type (P)</i>
1	0,0009	0,03
0,5	0,000675	0,02598076
0,25	0,0005625	0,02371708

-0,25	0,0003375	0,01837117
-0,5	0,000225	0,015
-1	0	0



On remarque qu'au fur et à mesure que le coefficient de corrélation baisse (*de 1 à -1*), le risque du portefeuille baisse. En d'autres termes, un portefeuille formé de titres corrélés positivement n'est pas bien diversifié. Ce constat est d'autant plus vrai que le coefficient de corrélation est grand.

Reprenons le premier exemple de cette section, et augmentons le nombre de portefeuille formé par les deux titres choisis. Le premier portefeuille sera constitué complètement du **titre 1**. Le deuxième portefeuille sera constitué de 90% du titre 1 et de 10% du **titre 2**, et ainsi de suite.

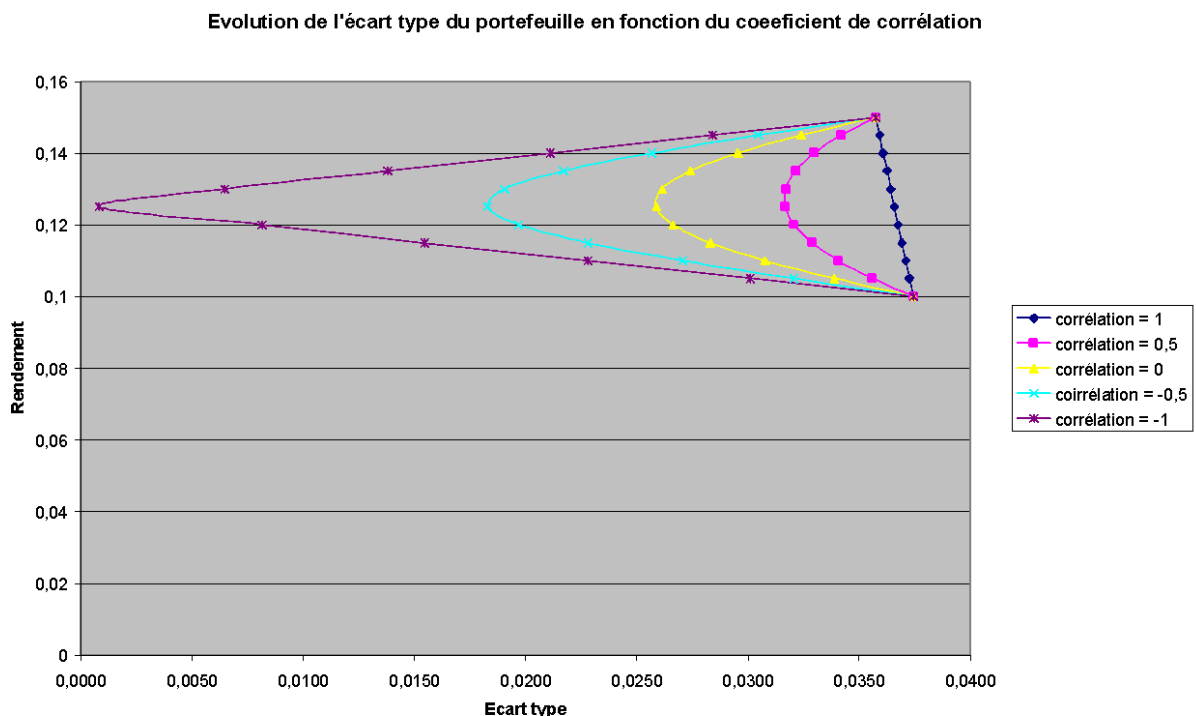
En procédant de cette façon, nous obtenons le tableau suivant :

Rendement espéré et écart type du portefeuille en fonction du coefficient de corrélation

Portefeuille	E(Rp)	Coefficient de corrélation				
		$\rho = 1$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0$	$\rho = -0,5$	$\rho = -1$
1	0,1	0,0374	0,0374	0,0374	0,0374	0,0374
2	0,105	0,0373	0,0356	0,0339	0,0321	0,0301

3	0,11	0,0371	0,0341	0,0308	0,0271	0,0228
4	0,115	0,0369	0,0329	0,0283	0,0228	0,0155
5	0,12	0,0368	0,0321	0,0266	0,0197	0,0082
6	0,125	0,0366	0,0317	0,0259	0,0183	0,0008
7	0,13	0,0364	0,0317	0,0262	0,0191	0,0065
8	0,135	0,0363	0,0321	0,0274	0,0217	0,0138
9	0,14	0,0361	0,0330	0,0296	0,0257	0,0211
10	0,145	0,0359	0,0342	0,0324	0,0305	0,0284
11	0,15	0,0358	0,0358	0,0358	0,0358	0,0358

Si nous reportons le rendement espéré en ordonnée et l'écart type en abscisse, comme nous l'avons fait précédemment, nous construisons plusieurs courbes des portefeuilles possibles.



D'après ces deux exemples, il s'avère qu'un investisseur qui souhaite réduire le risque grâce à la diversification, doit veiller à constituer son portefeuille de titres faiblement corrélés.

I.2.2. CONSTITUTION D'UN PORTEFEUILLE À PLUSIEURS TITRES RISQUÉS

L'investisseur a le choix entre deux stratégies :

- Minimiser le risque pour un rendement espéré donné ou ;
- Maximiser le rendement espéré pour un niveau de risque donné.

Ces deux stratégies constituent le principe fondamental de la théorie du portefeuille. Nous allons appliquer ce principe dans le cas d'un portefeuille à trois titres.

Dans ce cas, nous disposons des expressions suivantes :

$$E(R_p) = x_1.E(R_1) + x_2.E(R_2) + x_3.E(R_3)$$

$$\sigma_p^2 = x_1^2.\sigma_1^2 + x_2^2.\sigma_2^2 + x_3^2.\sigma_3^2 + 2.x_1.x_2.\sigma_{12} + 2.x_1.x_3.\sigma_{13} + 2.x_2.x_3.\sigma_{32}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Si nous supposons que l'investisseur opte pour la première stratégie, nous aurons à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } \sigma_p^2 \\ S / C \\ E(R_p) = E^0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

En d'autres termes, nous supposons que l'investisseur cherche à trouver les proportions x_1 , x_2 et x_3 à investir dans chaque actif qui minimise la variance de son portefeuille pour un rendement espéré E^0 .

Prenons l'exemple de trois titres dont la matrice des variances et des covariances est donnée par le tableau suivant:

Matrice des variances – covariances (En 10^{-4})

	Actif 1	Actif 2	Actif 3
Actif 1	14	-7,2	-3,5
Actif 2	-7,2	12,8	3,5
Actif 3	-3,5	3,5	2

Et dont les rendements sont respectivement : 187 ; 81 et 35.

A partir de ce tableau, nous pouvons écrire alors :

$$\begin{cases} \text{Min}\sigma_p^2 = (14)x_1^2 + (12,8)x_2^2 + (2)x_3^2 + 2.(-7,2)x_1.x_2 + 2.(-3,5)x_1.x_3 + 2.(3,5)x_2.x_3 \\ S / C \\ 187.x_1 + 81.x_2 + 35.x_3 = E^0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Le Lagrangien lié à ce problème est :

$$L = (14)x_1^2 + (12,8)x_2^2 + (2)x_3^2 + 2.(-7,2)x_1.x_2 + 2.(-3,5)x_1.x_3 + 2.(3,5)x_2.x_3 + \lambda_1.(187.x_1 + 81.x_2 + 35.x_3 - E^0) + \lambda_2.(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

Minimiser la variance du portefeuille, revient à minimiser la fonction L à cinq variables x_1, x_2, x_3, λ_1 et λ_2

Pour ce faire, nous allons calculer les dérivés partiels de cette fonction et les égaliser à zéro.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 392.x_1 - 14,4.x_2 - 7.x_3 + 187\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 327,68.x_1 - 14,4.x_1 + 7.x_3 + 81\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 8.x_1 - 7.x_2 + 7.x_3 + 35\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 187.x_1 + 81.x_2 + 35.x_3 - E^0 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$$

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 392 & -14,4 & -7 & 187 & 1 \\ 327,7 & -14,4 & 7 & 81 & 1 \\ 8 & -7 & 7 & 35 & 1 \\ 187 & 81 & 35 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E^0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si l'on appelle la matrice du premier membre M , le vecteur de ce membre X et le vecteur du deuxième membre K , on peut écrire de façon synthétique : $M.X = K$

Le calcul du vecteur X nécessite d'inverser M . Cette inversion nous donne comme résultats.

La suite du calcul?

▪ *L'option attente*

Une entreprise agricole se trouve face à une opportunité d'investissement, qui consiste à créer sur des terres agricoles qu'elle possède un projet d'élevage de bétail. Le coût d'investissement total (y compris le coût d'opportunité des terres) est de 208 M DH. Cette opération engendrera une valeur qui dépend de la propagation ou non d'une certaine épidémie qui s'attaquerait au bétail. Cette valeur peut être de 405 M DH ou de 98 M DH. Les deux états de la nature sont équiprobables.

1. Calculer la VAN de ce projet, en supposant que sa durée de vie est d'une année. Etant donné que l'entreprise en question est cotée en bourse, on vous fournit les informations suivantes en vue de calculer le taux d'actualisation du projet:

- l'actif sans risque a un taux de rendement de 12% ;
- le taux de rendement du marché est de 8% ;
- le β de l'action de l'entreprise est de 1,2.

Le taux d'actualisation est de :

$$r = 12\% + 1.2(8\% - 12\%) = 7.2\%$$

La valeur actuelle de l'entreprise est :

$$V = \frac{pV^+ + (1-p)V^-}{1+r} = \frac{0.5 \cdot 405 + 0.5 \cdot 98}{1.072} = 234.60 \text{ MDH}$$

La valeur actuelle nette :

$$VAN = 234.60 - 208 = 26.60MDH$$

2. L'entreprise reçoit des informations selon lesquelles, il est possible que dans une année, elle puisse disposer d'un vaccin qui lui permette d'endiguer l'épidémie. Elle étudie la solution de repousser l'investissement à l'année prochaine. Opter pour une telle décision, lui permettrait de lever l'incertitude relative à la propagation de l'épidémie. En effet, soit l'entreprise sera sûre de cette propagation, soit elle aura la possibilité d'utiliser gratuitement le vaccin contre l'épidémie. Ces deux scénarios sont équiprobables. Calculer la VAN de l'option de reporter ; quelle est la meilleure solution pour l'entreprise ?

Arbre de décision du problème :

Si l'entreprise obtient de nouvelles informations, elle investira 208 dans un projet qui lui permettra de gagner de façon certaine un bénéfice de 405 MDH une année plus tard, donc la VAN du projet dans un an est :

$$C^+ = \text{Max} \left(0; \frac{V^+}{1+t} - I_0 \right) = 135,6$$

Attendre

Les revenus futurs du projet sont actualisés au taux d'intérêt sans risque : $t = 12\%$

Si l'entreprise se déclare aujourd'hui, la VAN du projet est :

$$C^- = \text{Max} \left(0; \frac{V^-}{1+t} - I_0 \right) = 0$$

On calcule la valeur actuelle du projet à partir de ces deux valeurs optionnelles :

$$V = \frac{pC^+ + (1-p)C^-}{1+t}$$

$$= \frac{0.5 \cdot 135.6 + 0.5 \cdot 0}{1.12} = 60.53MDH$$

D'où la VAN :

$$VAN = V - I_0$$

$$= 60.53 - 208 = -147.47MDH$$

La VAN de l'option de reporter est négative : il vaut mieux renoncer à l'option attendre.

Exercice

La société Moubarak envisage d'étudier la rentabilité d'un projet de durée de vie $n = 5$ ans et de montant d'investissement $I = 1700000$ DH. Les flux nets de trésorerie annuels prévisionnels de ce projet sont consignés dans le tableau suivant :

Années	CF_t
1	400 000
2	500 000
3	900 000
4	500 000
5	300 000

- 1- On vous demande de calculer la VAN si l'on adopte un taux d'actualisation de 10% et le TRI de ce projet. Discuter les résultats obtenus.
- 2- On souhaite étudier l'impact des sources de financement sur la rentabilité du projet. On sait qu'il sera financé à hauteur de 900000 DH par un emprunt contracté auprès d'un organisme international au taux de 4% remboursable sur 5 ans, dont l'amortissement du capital est linéaire, et à hauteur de 800000 DH par fonds propres. On vous demande :
 - a. De présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt ;
 - b. De calculer le TRI des fonds propres investis par les actionnaires ;
 - c. Si le TRI minimum attendu par les actionnaires est de 25%, quelle est la VAN attendue de ce projet ?
- 3- Calculer la VAN du projet en adoptant comme taux d'actualisation le coût du capital, sachant que le taux d'impôt est de 30%.

Corrigé

$$VAN = -I + \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t} + \frac{VR}{(1+r)^n}$$

1- On sait que :

Comme $VR = 0$, il reste :

$$VAN = -1700000 + \frac{400000}{(1,1)} + \frac{500000}{(1,1)^2} + \frac{900000}{(1,1)^3} + \frac{500000}{(1,1)^4} + \frac{300000}{(1,1)^5}$$

$$VAN = 280\,825,95 \text{ DH}$$

Le *TRI* est le taux de rentabilité attendu du projet d'investissement. Il correspond au taux a^* pour lequel la somme des flux actualisés est nul.

$$TRI = a^* \text{ tel que } -1700000 + \frac{400000}{(1+a^*)} + \frac{500000}{(1+a^*)^2} + \frac{900000}{(1+a^*)^3} + \frac{500000}{(1+a^*)^4} + \frac{300000}{(1+a^*)^5}$$

Les calculs effectués conduisent à un *TRI* de 16%

2-

a. Le tableau d'amortissement de l'emprunt se présente comme suit :

<i>Années</i>	<i>Capital restant dû</i>	<i>Charges d'intérêt</i>	<i>Amortissement du capital</i>	<i>Annuités</i>
1	900 000	42 000	180 000	222 000
2	560 000	33 600	180 000	213 600
3	420 000	25 200	180 000	205 200
4	280 000	16 800	180 000	196 800
5	140 000	8 400	180 000	188 400

b. Pour calculer le *TRI* des fonds propres investis par les actionnaires, il faut déterminer les flux revenant aux actionnaires. il s'agit des flux produits par l'investissement diminués des flux relatifs à l'emprunt.

c.

<i>Années</i>	<i>Flux totaux</i>	<i>Flux d'emprunt</i>	<i>Flux aux actionnaires</i>
0	-1700000	900000	-800000
1	400000	-182 000	218000
2	500000	-173 600	326400
3	900000	-165 200	734800
4	500000	-156 800	343200
5	300000	-148 400	151600

$$TRIFP = r^* \text{ telque } - 800000 + \frac{218000}{(1+r^*)} + \frac{326400}{(1+r^*)^2} + \frac{734800}{(1+r^*)^3} + \frac{343200}{(1+r^*)^4} + \frac{151600}{(1+r^*)^5}$$

Le *TRI* des fonds propres est de l'ordre de 33%.

En ce qui concerne la *VAN* des fonds propres, elle se calcule de la façon suivante :

$$VAN = - - 800000 + \frac{218000}{(1,25)} + \frac{326400}{(1,25)^2} + \frac{734800}{(1,25)^3} + \frac{343200}{(1,25)^4} + \frac{151600}{(1,25)^5}$$

$$VAN = 149765 \text{ DH}$$

Le *TRI* des fonds propres (33%) est supérieur au taux requis par les actionnaires (25%), la *VAN* est donc positive. Par conséquent, le projet peut être réalisé.

3- Le coût du capital correspond au coût moyen pondéré de ce dernier. Si l'on tient compte de la fiscalité, ce coût se formule de la façon suivante :

$$k = f \cdot \frac{FP}{I} + e \cdot \frac{E}{I}$$

$$k = 0,25 \cdot \frac{800000}{1700000} + 0,06 \cdot \frac{900000}{1700000}$$

$$k = 15\%$$

Plutôt que d'actualiser les *CF* revenant aux actionnaires au taux de rendement requis par les actionnaires *f*, on préfère souvent, par souci de simplicité, actualiser le flux du projet au coût moyen pondéré qui correspond au coût global du financement.

En procédant de la sorte, on obtient une *VAN* = 392798 DH.

Exemple1

Soient deux titres dont les rendements et les probabilités sont disponibles dans quatre scénarios possibles:

S_k	P_k	R_{1k}	R_{2k}
1	0,1	15%	-5%
2	0,2	10%	0%

3	0,3	5%	5%
4	0,4	0%	10%

Le tableau suivant permet de donner les rendements espérés des deux titres, leurs variances ainsi que leur covariance :

S_k	P_k	R_{1k}	R_{2k}	$P_k \cdot R_{1k}$	$P_k \cdot R_{2k}$	$P_k(R_{1k} - \mu_1)^2$	$P_k(R_{1k} - \mu_1)^2$	$P_k(R_{1k} - \mu_1) \cdot (R_{2k} - \mu_2)$
1	0,1	15%	-5%	1,50%	-0,50%	0,10%	0,10%	-0,10%
2	0,2	10%	0%	2,00%	0,00%	0,05%	0,05%	-0,05%
3	0,3	5%	5%	1,50%	1,50%	0,00%	0,00%	0,00%
4	0,4	0%	10%	0,00%	4,00%	0,10%	0,10%	-0,10%

On a ainsi :

- $\mu_1 = \mu_2 = 5\%$;
- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0,25\%$ et donc $\sigma_1 = \sigma_2 = 5\%$
- $\sigma_{12} = -0,25\%$

Par conséquent, ces deux titres sont parfaitement corrélés négativement. En effet

$$\rho_{12} = \frac{-0,25\%}{5\% \cdot 5\%} = -1$$

Constituons un portefeuille R_p , tel que $R_p = xR_1 + (1-x)R_2$

On a $\mu_p = x \cdot \mu_1 + (1-x)\mu_2 = 5\% \cdot x + 5\% \cdot (1-x) = 5\%$

Ainsi Quelle que soit la proportion x, la moyenne du portefeuille est de 5%.

$$\text{On a } \sigma_p^2 = x^2 \sigma_1^2 + (1-x)^2 \sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_{12}$$

$$\text{Or } \sigma_{12} = -\sigma_1 \cdot \sigma_2$$

$$\text{D'où } \sigma_p^2 = x^2 \sigma_1^2 + (1-x)^2 \sigma_2^2 - 2x(1-x)\sigma_1 \cdot \sigma_2 \quad \text{et} \quad \sigma_p = |x\sigma_1 - (1-x)\sigma_2|$$

Alors :

$$\text{▪ si } x = \frac{1}{3}; \sigma_p = \left| \frac{1}{3} \cdot 5\% - \frac{2}{3} \cdot 5\% \right| = 1,67\%$$

$$\text{▪ et si } x = \frac{1}{2}; \sigma_p = \left| \frac{1}{2} \cdot 5\% - \frac{1}{2} \cdot 5\% \right| = 0\%$$

On voit que la diversification a pour effet de réduire le risque, et qu'il existe un portefeuille de risque nul.

Exemple 2

Monsieur ZAGHLOUL, dirigeant de l'Entreprise Interactions, veut investir une somme de 500 000 Dhs dans l'achat de titres boursiers.

Dans ce but, il a recueilli les informations, données dans le tableau suivant, sur les dividendes de deux entreprises, *xfor* et *yikida*, au cours des huit dernières années.

<i>Années</i>	<i>xfor</i>	<i>yikida</i>
1997	47	56
1998	38	42
1999	45	40
2000	46	40
2001	36	43
2002	46	39
2003	42	43
2004	41	43

En considérant qu'il est possible pour M. ZAGHLOUL de placer son argent dans ces deux entreprises et que le prix d'achat de leurs actions est le même, soit 500 Dhs :

1. Chercher la composition du portefeuille qui rend minimale la dispersion attendue des résultats dans les deux hypothèses suivantes :
 - a. Les deux actions sont dépendantes
 - b. Les deux actions sont indépendantes
2. Calculer la rentabilité moyenne des résultats ainsi que leur dispersion d'un portefeuille de 500 000 Dhs réparti en 50% d'actions de *xfor* et 50% d'actions de *yikida*.

Solution

1. Dressons un tableau dans lequel, on porte :

- L'évolution des dividendes des deux entreprises considérées ;
- La moyenne, la variance, l'écart type et la covariance des deux dividendes.

Années	D_1	D_2	D_1^2	D_2^2	$D^2 (D=D_1+D_2)$	$D_1 \cdot D_2$
1997	47	36	2209	1296	6889	1692
1998	38	42	1444	1764	6400	1596
1999	45	40	2025	1600	7225	1800
2000	46	40	2116	1600	7396	1840
2001	36	43	1296	1849	6241	1548
2002	46	39	2116	1521	7225	1794
2003	42	43	1764	1849	7225	1806
2004	41	43	1681	1849	7056	1763
Somme	341	326	14651	13328	55657	13839
μ	42,62	40,75	1831,37	1666	6957,12	1729,87
σ^2	14,48	5,43				
σ_{12}	-7,09					
σ_P	5,73					

2. Soit P portefeuille à constituer par M. ZAGHLOUL. Si x est la part d'actions *xfor* dans P , $(1-x)$ est la part d'actions *yikidad* dans P .

Pour répondre à la question posée dans l'hypothèse a, il faut résoudre le programme suivant :

$$\text{Min } \sigma_P^2 = x^2 \sigma_1^2 + (1-x)^2 \sigma_2^2 + 2 \sigma_{12}$$

$$\text{Avec } x \cdot n_1 + (1-x) \cdot n_2 = 500\,000$$

En remplaçant σ_1^2 , σ_2^2 et σ_{12} par leurs valeurs, le programme devient :

$$\text{Min } \sigma_P^2 = 14,484375x^2 + 5,4375(1-x)^2 + 2 \cdot (-7,09375)x(1-x)$$

$$\text{Avec } x \cdot n_1 + (1-x) \cdot n_2 = 500\,000$$

En dérivant σ_P^2 par rapport à x , on obtient :

$$28,96874x - 10,875(1-x) - 14,1875(1-2x) = 0$$

En égalisant cette expression à 0, on trouve $x = 0,367$ et donc $1-x = 0,633$.

Exemple 3

On considère cinq titres **A**, **B**, **C**, **D** et **E** dont la valeur à l'échéance dépend de deux scénarios S_1 et S_2 équiprobables. Les valeurs actuelles et à échéance des cinq titres sont donnés dans le tableau suivant :

<i>Titre</i>	V_0	$V_1(S_1)$	$V_1(S_2)$
A	132	180	140
B	425	427	577
C	39	68	40
D	3220	5315	2290
E	960	850	1454

On vous demande de :

- déterminer le titre le plus rentable et le titre le moins rentable;
- déterminer le titre le plus risqué et le titre le moins risqué;
- tracer la frontière efficiente et dire quels sont les titres qui ne sont pas efficients ;
- déterminer les titres qui ont une corrélation positive (puis négative) avec **A**.

Réponse

Dans le tableau suivant, on calcule :

- le prix moyen
$$V_1 = \frac{V_1(S_1) + V_1(S_2)}{2}$$

- la rentabilité
$$R = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

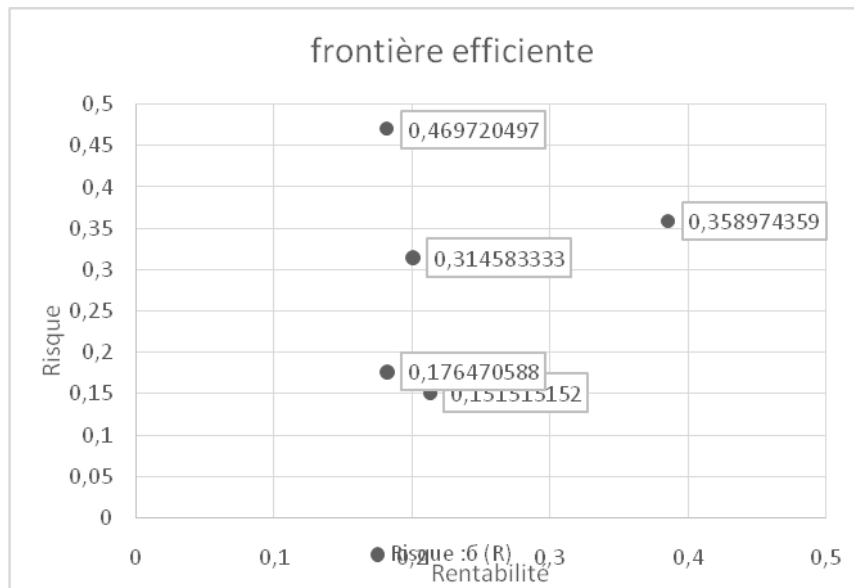
- la variance de
$$V_1 : \sigma^2(V_1) = \sum_1^2 p_i \cdot (V_1 - E[V_1])^2$$

- la variance de $R : \sigma^2(R) = \sigma^2(V_1) / V_0^2$
- le risque du titre est mesuré par : $\sigma(R)$

<i>Titre</i>	V_0	$V_1(S_1)$	$V_1(S_2)$	<i>Prix moyen V_1</i>	<i>Rentabilité: R</i>	<i>écart type: $\sigma^2(V_1)$</i>	$\sigma^2(R)$	<i>(Risque)</i>
A	132	180	140	160	21,21%	400	2,30%	15,15%
B	425	427	577	502	18,12%	5625	3,11%	17,65%
C	39	68	40	54	38,46%	196	12,89%	35,90%
D	3220	5315	2290	3802,5	18,09%	2287656,25	22,06%	46,97%
E	960	850	1454	1152	20,00%	91204	9,90%	31,46%

On remarque sur ce tableau que :

- C** est le titre le plus rentable et **D** est le moins rentable. **A** est le moins risqué et **D** est le plus risqué ;
- Comme **D** est le plus risqué et le moins rentable, il est donc dominé par les autres titres ; il l'est, par exemple, par **E** : $(E \Delta D)$.
- Le titre **B** est moins rentable que **A** et plus risqué que ce dernier. **B** est donc dominé par **A** : $(A \Delta B)$.
- B** et **D** n'appartiennent pas donc à la frontière des titres efficients.
- C** et **D** évoluent de la même façon que **A** dans les deux scénarios. Ainsi, dans S_1 , ils sont tous les trois au dessus de leur moyenne, et dans S_2 , ils sont tous les trois au dessous de leur moyenne. On en déduit que **C** et **D**, ont une corrélation positive (*parfaite*) avec **A**. En revanche, **B** et **E** ont un comportement inverse par rapport à **A**. Ils sont au dessous de leur moyenne dans S_1 , et au dessus de leur moyenne dans S_2 .



Exercice

Un investisseur en bourse détient un portefeuille composé des actions de la société l'Eau Du Maroc (*EDM*) dont les caractéristiques sont les suivantes :

$Er_e = 14,5\%$ et $\sigma_e = 20\%$.

Voulant tirer profit du principe de diversification, il envisage de constituer un portefeuille composé de 70% des actions d'*EDM* et de 30% des actions de la société Maroc Innovation (*MI*), dont les caractéristiques sont les suivantes :

$Er_m = 12,5\%$ et $\sigma_m = 15,5\%$.

On vous demande de :

- 1- Discuter le couple rentabilité – risque du portefeuille envisagé, sachant que la covariance (r_e, r_m) est égale à 0,4%,
- 2- Calculer le coefficient de corrélation $\rho(r_e, r_m)$,
- 3- L'investisseur souhaite réduire le risque à $x\%$, on vous demande de calculer la nouvelle répartition du portefeuille entre les deux lignes *EDM* et *MI*.
- 4- On suppose que la rentabilité du portefeuille constitué est distribuée normalement. On vous demande de déterminer la probabilité de dégager une rentabilité minimale du portefeuille de 20%.

Corrigé

1- Le couple rentabilité – risque :

- Calculons d'abord la rentabilité espérée du portefeuille envisagé :

$$E(R_p) = 0,7.E(R_e) + 0,3.E(R_m) = 0,7.14,5\% + 0,3.12,5\% = 10,15\% + 3,75\% = 13,9\%$$

- Calculons maintenant le risque lié à ce portefeuille :

$$\sigma(R_p) = 0,7^2 \cdot \sigma_e^2 + 0,3^2 \cdot \sigma_m^2 + 2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot \sigma_{em} = 0,7^2 \cdot 20\%^2 + 0,3^2 \cdot 15,5\%^2 + 2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,4\%$$

$$\sigma(R_p) = 0,0196 + 0,00216225 + 0,00168 = 0,02344225 = 2,344\%$$

- Regardons ce qui s'est passé au niveau du couple rentabilité – risque de ce portefeuille :

On remarque que la rentabilité est passée de 14,5% à 13,9%, soit une baisse de 4,13%. Par ailleurs, le risque a diminué de 88,28%, en passant de 20% à 2,344%.

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{0,004}{0,2 \cdot 0,155} = 0,129$$

2- Le coefficient de corrélation :

Le coefficient de corrélation étant proche de 0, il existe donc une faible corrélation entre les deux types d'actions. Dans ce cas, la diversification s'avère intéressante en termes de réduction du risque. Cette conclusion ne fait que corroborer celle de la première réponse.

Suite du corrigé ?

I.3. FINANCEMENT DES INVESTISSEMENTS

Une entreprise dispose de deux machines, à l'aide desquelles elle fabrique trois produits notés *B1*, *B2* et *B3*. Chacune de ces deux machines ne peut fonctionner que 24 heures par semaines. On suppose qu'à long terme il existe deux états du marché.

Dans l'état *E1* du marché, les marges unitaires de l'entreprise réalisées grâce aux ventes des produits *B1*, *B2*, et *B3* sont respectivement de 100 DH, 140DH et 180DH.

- Une unité de *B1* requiert 4h de *M1* et 10h de *M2* ;
- Une unité de *B2* requiert 8h de *M1* et 4h de *M2* ;
- Une unité de *B3* requiert 12h de *M1* et 6h de *M2*.

1. Quelle est la production optimale de cette entreprise, étant entendu qu'elle cherche à maximiser son bénéfice ? On vous demande de répondre à cette question grâce au théorème du dual, puis à l'aide du simplexe.

a) Formulation du problème :

Soit X, Y, Z la production hebdomadaire respective du produit $B1, B2$ et $B3$.
La formulation du problème linéaire primal s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{Max } T = 100X + 140Y + 180Z$$

$$\begin{cases} 4X + 8Y + 12Z & \leq 24 \\ 10X + 4Y + 6Z & \leq 24 \\ X, Y, Z & \geq 0 \end{cases}$$

La formulation du problème linéaire dual s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\text{Min } Z = 24x + 24y$$

$$\begin{cases} 4x + 10y & \geq 100 \\ 8x + 4y & \geq 140 \\ 12x + 6y & \geq 180 \\ x, y & \geq 0 \end{cases}$$

b) Résolution du problème dual :

La solution optimale est $Z = 465$ pour $x=3.75$ et $y=15.6$

c) Résolution avec l'algorithme du simplexe :

Base	X	Y	Z	e_1	e_2	RHS
e_1	4	8	12	1	0	24
e_2	10	4	6	0	1	24
OBJ	100	140	180	0	0	0

Variable entrante en base Z

- Variable sortante de la base e_1

Base	X	Y	Z	e_1	e_2	RHS
Z	1/3	2/3	1	1/12	0	2
e_2	8	0	0	-0.5	1	12
OBJ	40	20	0	-15	0	360

- Variable entrante en base X
- Variable sortante de la base e_1

Base	X	Y	Z	e_1	e_2	RHS
Z	0	2/3	1	5/48	-1/24	1.5
X	1	0	0	-1/16	1/8	1.5
OBJ	0	20	0	-12.5	-5	420

- Variable entrante en base Y
- Variable sortante de la base X

Base	X	Y	Z	e_1	e_2	RHS
Y	0	1	1.5	5/32	-1/16	2.25
X	1	0	0	-1/16	1/8	1.5
OBJ	0	0	-30	-125/8	-3.75	465

Le problème initial a une solution optimale puisque la condition suffisante d'optimalité est vérifiée. La production optimale de cette entreprise est :

$X = 1.5$ par semaine soit 78 unités de *B1* par an.
 $Y = 2,25$ par semaine soit 117 unités de *B2* par an
 $Z = 0$ donc 0 unité de *B3* par an

L'entreprise réalisera un profit de 465 DH par semaine soit **24180 DH par an.**

2. On suppose que l'entreprise doit louer les deux machines M1 et M2 aux prix indiqués par les valeurs des variables duales à l'optimum, quel profit réalise-t-elle ?

Si l'entreprise loue les deux machines au prix indiqués par les valeurs des variables duales alors elle sera obligée de maximiser sa production afin de ne pas réaliser le profit nul.

3. On vous demande de répondre à la question ci-dessus, mais en supposant que la location des machines M1 et M2 se fait respectivement aux prix de 25 DH et 15 DH.

On suppose que 25 DH et 15 DH représentent les prix de location des deux machines M1 et M2 par jour. Pour atteindre la production optimale, il faut utiliser obligatoirement M1 et M2 pendant une semaine, donc l'entreprise doit payer

$(25 + 15) \times 7 = 280$ DH par semaine.

Le profit sera alors de $465 - 280 = 185$ DH par semaine

4. On propose à cette entreprise d'acheter les machines à un prix global de 16000 DH. On suppose que la durée de vie des deux machines est de 5 ans (de 52 semaines chacune), et ont une valeur résiduelle de 500 DH à la fin de la cinquième année. L'entreprise doit-elle préférer cette solution à celle de la location de la 3ème question ? Pour répondre à cette question, calculer la VAN des deux solutions, en utilisant un taux d'actualisation de 10%.

$$V_{actuelleNette} = \frac{\sum_{P=0}^{P=N} CF}{(1+t)^P} - I + VR$$

- Pour l'achat des deux machines : **$VAN = 75960$ DH**
- Pour la location des deux machines (25+15 DH / jour) : **$VAN = 18660$ DH**

D'après ces résultats, l'achat des deux machines est plus bénéfique par rapport à leur location.

5. Dans l'état E2 du marché, les marges unitaires de l'entreprise réalisées grâce aux ventes des produits B1, B2, et B3 sont respectivement de 60 DH, 120DH et 180DH. Répondez à toutes les questions posées ci – dessus dans ce deuxième état du marché.

Question 1 :

- Formulation du problème :

Soit X, Y, Z la production hebdomadaire respective du produit $B1, B2$ et $B3$.

La formulation du problème linéaire primal s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{Max } T = 60X + 120Y + 180Z$$

$$\begin{cases} 4X + 8Y + 12Z \leq 24 \\ 10X + 4Y + 6Z \leq 24 \\ X, Y, Z \geq 0 \end{cases}$$

La formulation du problème linéaire dual s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\text{Min } Z = 24x + 24y$$

$$\begin{cases} 4x + 10y \geq 60 \\ 8x + 4y \geq 120 \\ 12x + 6y \geq 180 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- Résolution du problème dual :

La solution optimale est $Z = 360$ pour $x=15$ et $y=0$

- Résolution avec l'algorithme du simplexe :

Base	X	Y	Z	e_1	e_2	RHS
e_1	4	8	12	1	0	24
e_2	10	4	6	0	1	24
OBJ	60	120	140	0	0	0

- Variable entrante en base Z
- Variable sortante de la base e_1

Base	X	Y	Z	e_1	e_2	RHS
Z	1/3	2/3	1	1/12	0	2
e_2	8	0	0	-0.5	1	12
OBJ	0	0	0	-15	0	360

Le problème initial a une solution optimale puisque la condition suffisante d'optimalité est vérifiée. La production optimale de cette entreprise est :

$X = 0$ par semaine soit 0 unités de $B1$ par an.

$Y = 0$ par semaine soit 0 unités de $B2$ par an

$Z = 2$ donc 104 unités de $B3$ par an.

L'entreprise réalisera un profit de 360 DH par semaine **soit 18720 DH par an.**

Question2 :

Si l'entreprise loue les deux machines au prix indiqués par les valeurs des variables duales alors elle va être obligée de maximiser sa production pour ne pas avoir un profit nul.

Question 3 :

On suppose que 25 DH et 15 DH représentent les prix de location des deux machines M1 et M2 par jour. Et pour atteindre la production optimale, il faut utiliser obligatoirement M1 et M2 pendant une semaine. L'entreprise doit donc payer $(25 + 15) \times 7 = 280$ DH par semaine. Le profit sera donc de $360 - 280 = 80$ DH

Question4 :

$$V_{actuelleNette} = \frac{\sum_{P=0}^{P=N} CF}{(1+t)^P} - I + VR$$

- Pour l'achat des deux machines : **$VAN = 55274$ DH**
- Pour la location des deux machines 25+15 DH par jour : **$VAN = 63078.69$ DH.**

6. Les états E1 et E2 correspondent en fait à deux scénarios possibles du futur. On suppose que l'entreprise préfère l'achat des machines à la location dans les deux scénarios. Trouvez alors la probabilité qu'elle peut tolérer pour le scénario 2 si elle n'accepte pas de VAN espérée négative.

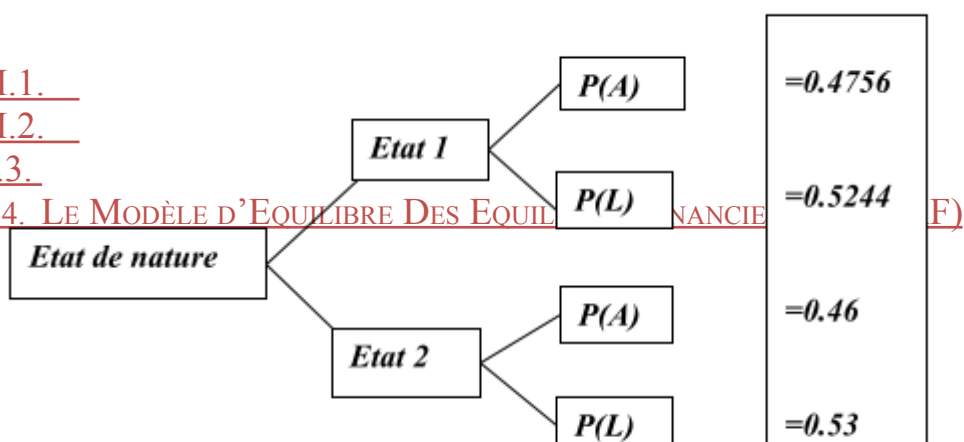
II-

II.1.

II.2.

I.3.

I.4. LE MODÈLE D'EQUILIBRE DES EQUILIBRES FINANCIERS



Le *MEDAF* a été introduit par Jack Treynor en 1961 puis a été développé par William Sharpe (1964), John Lintner (1965) et Jan Mossin (1966) indépendamment. Il s'agit d'un modèle dont le but est de donner une explication des taux de rentabilité des actifs financiers en fonction de leur risque. Il est donc très utile dans l'évaluation des stratégies d'investissement sur les marchés financiers. Toutefois, il est également d'un grand intérêt dans la décision d'investissement. Il sert, notamment à définir les taux d'actualisation à appliquer dans le calcul des VAN des projets considérés.

Nous verrons successivement les hypothèses du *MEDAF*, la mesure du risque qu'il propose et la formalisation à laquelle il aboutit. Le dernier paragraphe insistera sur son utilisation en décision d'investissement.

II.3.

II.4.

II.4.1. HYPOTHÈSES

Le *MEDAF* a été développé sur la base d'un certain nombre d'hypothèses, que l'on peut résumer de la façon suivante :

- les investisseurs sont dotés d'un comportement rationnel:
 - ils savent procéder à l'identification et à l'évaluation de leurs actions d'investissement ;
 - ils adoptent un comportement d'optimisation (*ils cherchent à maximiser leurs bénéfices et à minimiser le risque, dont ils sont averses*) ;
 - ils composent leurs portefeuilles en tenant compte des indications suivantes : l'espérance, la variance et la covariance de leurs rendements;
- Le marché des titres est parfait.
 - Les investisseurs peuvent disposer gratuitement de toute l'information dont ils ont besoin pour évaluer leurs actions;

- Il n'existe pas de coûts de transaction et les titres sont parfaitement divisibles ;
- Les dividendes et les plus-values ne sont pas taxés ;
- A l'issue des transactions, les prix formés, sont des prix d'équilibre, et tous les titres sont détenus;
- Il existe sur le marché un titre sûr rémunéré au taux d'intérêt (*sans risque*). Les agents économiques peuvent prêter et emprunter le montant qu'ils souhaitent à ce taux.
- Il existe sur le marché un portefeuille dont la rentabilité est maximale, c'est-à-dire pour lequel la rentabilité marginale de chaque titre qui le compose est la même.

II.4.2. EVALUATION DU RISQUE

Le *MEDAF* considère que l'écart – type du rendement d'un actif n'est pas une bonne mesure du risque, dans la mesure où il ne nous renseigne pas sur l'interaction de l'actif en question avec les autres actifs du marché. En effet, dans le paragraphe relatif à l'impact de la corrélation sur la diversification de la section précédente, nous avons conclu qu'un investisseur qui souhaite réduire le risque grâce à la diversification, doit veiller à constituer son portefeuille de titres faiblement corrélés. Prenons un autre exemple, très simple, pour mieux comprendre cette conclusion.

Soient deux projets d'investissement notés P_1 et P_2 . P_1 pourrait consister en l'achat d'un nombre d'actions d'une entreprise A et P_2 pourrait consister en l'achat d'un nombre d'actions d'une entreprise B . Les valeurs actuelles respectives des deux projets dans les deux scénarios envisagés, ainsi que les probabilités de ces scénarios sont consignées dans le tableau suivant :

Scénarios	Probabilité	VA (P_1)	VA (P_2)
S_1	$\frac{1}{2}$	300	- 150
S_2	$\frac{1}{2}$	- 150	300

D'après ces données, on peut observer que l'espérance des VA des deux projets est la même. En effet :

$$E(VA_1) = \frac{1}{2} \cdot 300 + \frac{1}{2} \cdot -150 = 150 - 75 = 75$$

$$E(VA_2) = \frac{1}{2} \cdot -150 + \frac{1}{2} \cdot 300 = -75 + 150 = 75.$$

Si l'on suppose que ces deux projets sont de coût identique, l'égalité de leurs VA, les rend équivalents aux yeux de l'investisseur.

L'écart – type est également le même pour les deux projets. En effet :

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2} \cdot (300 - 75)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-150 - 75)^2 = 25312,5 + 25312,5 = 50625$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2} \cdot (-150 - 75)^2 + \frac{1}{2} \cdot (300 - 75)^2 = 25312,5 + 25312,5 = 50625$$

On voit que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 225$.

Constituons maintenant un portefeuille **P** tel que $P = \frac{1}{2} \cdot P_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2$

Scénarios	Probabilité	VAN (P)
S ₁	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 300 + \frac{1}{2} \cdot -150 = 75$
S ₂	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot -75 + \frac{1}{2} \cdot 300 = 75$

$$VA(P) = \frac{1}{2} \cdot 75 + \frac{1}{2} \cdot 75 = 75$$

$$\sigma^2(P) = \frac{1}{2} \cdot (75 - 75)^2 + \frac{1}{2} \cdot (75 - 75)^2 = 0$$

Cet exemple, très simple, confirme clairement que la valeur d'un projet dépend de la nature de la corrélation qu'il a avec les autres projets. La réduction du risque est possible, en règle générale, lorsque les valeurs des projets en présence sont faiblement corrélées. Le risque d'un projet dépend plus de sa corrélation avec les autres projets.

C'est la raison pour laquelle, le *MEDAF* considère qu'il est intéressant d'évaluer le risque d'un actif par rapport à l'ensemble des actifs du marché que par sa variance ou son écart – type. L'indicateur désigné pour cette évaluation du risque de l'actif considéré par rapport à l'ensemble du marché est désigné par la lettre β . De façon approximative, il se définit de la façon suivante :

$$\beta = \frac{\text{risque de l'actif}}{\text{risque total du marché}}$$

Le β permet aux investisseurs d'évaluer l'impact d'une variation donnée du marché sur le rendement d'un actif. Ainsi :

- Un actif dont le $\beta > 1$ implique qu'il amplifie les fluctuations du marché. Quand le marché augmente de 1%, l'actif augmente de plus de 1%;
- Un actif dont le $\beta < 1$ implique qu'il amortit les fluctuations du marché. Quand le marché augmente de 1%, l'actif augmente de moins de 1%;
- Un actif dont le $0 < \beta$ est rare. Cela implique que l'actif fluctue dans le sens opposé du marché. On dit de ce genre d'actifs qu'ils constituent des valeurs refuges qui réduisent le risque du portefeuille.

II.4.2.1. Formalisation

La première étape dans la formalisation du MEDAF est la définition des variables suivantes :

- m_s est le rendement de l'actif risqué dans le scénario s de probabilité p_s ;
- r_m est le rendement espéré de l'actif risqué ;
$$r_m = \sum_{s=1}^S p_s \cdot m_s$$
 ;
- σ_s est le risque du rendement de l'actif risqué ;
$$\sigma_m^2 = \sum_{s=1}^S p_s \cdot (m_s - r_m)^2$$
- r_f est le rendement de l'actif sans risque.

A l'aide de ces variables, de façon formalisée, le β se calcule de la façon suivante :

$$\beta = \frac{\text{cov}(R_p, R_m)}{\sigma_m^2} = \frac{\rho_{pm} \cdot \sigma_p}{\sigma_m}$$

La deuxième étape est la définition de la part de chaque actif dans le patrimoine de l'investisseur :

- x est la proportion de l'actif risqué dans le patrimoine et $(1-x)$ est la proportion de l'actif sans risque dans le patrimoine ;
- De ce fait si l'on fixe $x = 0$, la totalité du patrimoine de l'investisseur est investie dans l'actif sans risque et le rendement espéré et l'écart – type du portefeuille seront $(r_f, 0)$. Si l'on fixe $x = 1$, la totalité du patrimoine de l'investisseur est investie dans l'actif incertain et le rendement espéré et l'écart – type du portefeuille seront (r_m, σ_m) . Si l'on fixe $0 < x < 1$, on se trouvera à un point sur la droite reliant ces deux cas extrêmes. Cette droite, comme nous allons le voir, exprime la contrainte budgétaire définissant le taux d'échange du marché entre rendement et risque.

Aussi, le rendement espéré d'un portefeuille composé d'un actif risqué et d'un actif sûr s'écrit-il :

$$r_p = x.r_m + (1-x).r_f$$

D'où

$$r_p = r_f + x.(r_m - r_f)$$

L'écart – type du rendement du portefeuille s'écrit, quant à lui :

$$\sigma_p^2 = x^2.\sigma_m^2$$

En remplaçant x par sa valeur $(\frac{\sigma_p}{\sigma_m})$ dans r_p , on obtient :

$$r_p = \frac{\sigma_p}{\sigma_m}(r_m - r_f) + r_f$$

On peut considérer que cette relation reste valable pour un portefeuille P constitué du portefeuille du marché, composé lui – même de toutes les actions risquées échangées sur un marché boursier national, de rendement r_m et d'un actif sans risque de rendement r_f .

Par ailleurs, on voit bien, comme nous l'avons dit en haut, que cette relation est celle d'une droite qui exprime la contrainte budgétaire définissant le taux d'échange du marché entre rendement et risque. En effet, ce dernier est exprimé par la pente de la droite. Il est égal à :

$$\frac{\delta r_p}{\delta \sigma_p} = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m}$$

Si l'on considère maintenant que notre portefeuille est constitué d'un titre individuel i et du portefeuille du marché, on peut écrire :

$$r_p = x.r_i + (1-x).r_m$$

On peut montrer, qu'à l'équilibre (*voir encadré ci-dessous*) :

$$r_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} (r_m - r_f) + r_f$$

comme $\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$, on peut écrire alors :

$$r_i = r_f + \beta_i (r_m - r_f)$$

Ce qui donne :

$$Er_i = r_f + \beta_i (Er_m - r_f)$$

On peut arriver au raisonnement précédent grâce à un modèle de régression linéaire à une seule variable. En effet, si on relève sur plusieurs périodes (*des mois par exemple*) le rendement r_i d'une action i et le rendement r_m du marché, on aboutit à la relation :

$$r_{it} = \alpha + \beta_i . r_{mt} + \varepsilon_t$$

Où :

r_{it} : est le rendement de l'action i pendant la période t ;

r_{mt} : est le rendement du portefeuille du marché pendant la période t ;

α et β_i : sont les paramètres du modèle.

L'estimation de α et β_i se fait à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires (*voir encadré*). Cette méthode stipule que la somme des carrés des écarts entre la droite et les observations soit minimale. Cet écart s'écrit de la façon suivante :

$$\sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^T (r_{it} - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_i \cdot r_{mt})^2$$

On trouve :

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \text{ et } \hat{\alpha} = \hat{r}_i - \hat{\beta}_i \cdot \hat{r}_m$$

Par ailleurs, ce modèle permet d'écrire : $\sigma^2(r_{it}) = \beta_i^2 \cdot \sigma^2(r_{mt}) + \sigma^2(\varepsilon)$

Ce qui signifie que le risque total de l'action i est composé du risque systématique (*du marché*) et du risque spécifique (*de l'action*).

Encadré

La méthode des *MCO* a pour principe de réduire les erreurs ε_t au minimum. Graphiquement, l'objectif est de tracer la droite qui soit la plus centrale possible au sein du nuage de points (*cf. Figure*). Pour ce faire, on doit disposer d'un critère à minimiser. Remarquons que les ε_t (erreurs) peuvent être soit positives soit négatives : il est donc nécessaire tout d'abord **de rendre la valeur ε_t des écarts "i positive**. On peut penser alors à deux distances potentielles : la valeur absolue et le carré. Ce dernier est privilégié car il permet des calculs relativement simples. Il faut savoir néanmoins que le carré va pondérer plus fortement les erreurs élevées relativement à la valeur absolue ; cette distance est donc moins robuste statistiquement.

Revenons donc au critère des *MCO* : l'objectif plus rigoureux est donc de minimiser la somme de toutes les erreurs au carré.

La variation résiduelle entre les points observés et la droite d'ajustement est :

$$\begin{aligned} VR(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_i) &= \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \\ VR(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_i) &= \sum_{t=1}^T (r_{it} - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_i \cdot r_{mt})^2 \end{aligned}$$

Minimiser VR nécessite d'écrire : $\frac{\partial VR}{\partial \hat{\alpha}} = \frac{\partial VR}{\partial \hat{\beta}} = 0$

$$\frac{\partial VR}{\partial \hat{\alpha}} = -2 \sum (r_{it} - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_i r_{mt}) = 0$$

On obtient alors :

$$\frac{\delta VR}{\delta \hat{\beta}_i} = -2 \sum (r_{it} - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_i r_{mt}) r_{mt} = 0$$

En développant ces deux expressions, on obtient : $\sum r_{it} - n.\hat{\alpha} - \hat{\beta}_i \sum r_{mt} = 0$

$$\sum r_{mt} . r_{it} - \hat{\alpha} \sum r_{mt} - \hat{\beta}_i \sum r_{mt}^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ce qui donne : } n.\hat{\alpha} + \hat{\beta}_i \sum r_{mt} &= \sum r_{it} \\ \hat{\alpha} \sum r_{mt} + \hat{\beta}_i \sum r_{mt}^2 &= \sum r_{mt} . r_{it} \end{aligned}$$

Grâce à ces deux expressions, on trouve les valeurs des paramètres α et β_i :

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum r_{it}}{n} - \hat{\beta}_i \frac{\sum r_{mt}}{n}$$

$$\hat{\alpha} = \hat{r}_{it} - \hat{\beta}_i \hat{r}_{mt}$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum (r_{mt} - \hat{r}_{mt}) . (r_{it} - \hat{r}_{it})}{\sum (r_{mt} - \hat{r}_{mt})^2}$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

On remarque que :

II.4.2.2. Actualisation

L'utilisation du *MEDAF* permet de déterminer pour un niveau de risque non diversifiable, le taux de rendement sur le marché financier. Ce taux de rendement est à comparer au rendement du projet. Si le rendement du projet est supérieur au rendement sur le marché financier, le projet est acceptable. Sinon, le projet est à rejeter.

Cette comparaison peut être faite en utilisant le critère de la *VAN*. Avec cette dernière, on peut utiliser le taux d'actualisation fourni par le *MEDAF*. Ce taux d'actualisation se compose du taux sans risque, de la prime de risque du marché et du bêta de l'entreprise ou du projet d'investissement. Un tel taux d'actualisation reflète le risque du projet.

Comme on l'a vu, le bêta peut être estimé par régression linéaire sur des données historiques ou déduit du bêta d'entreprises comparables, pour les entreprises qui ne sont pas cotées.

Il faut dire que l'estimation du bêta pose certains problèmes. En effet :

- la covariance (*actif, marché*) varie dans le temps ;
- les indices de marchés utilisés (*Masi, CAC40, etc.*) ne reproduisent pas le portefeuille de marché théorique qui devrait contenir tous les actifs, y compris les actifs non boursiers : immobilier, or, etc.;

Aucun de ces problèmes ne remet en cause le *MEDAF* en lui-même.

On dresse ci-dessous le tableau donnant le cours mensuel moyen de l'action de l'entreprise Cuir de Fès cotée à la Bourse de Casablanca et du Masi, indice qui représente la valeur moyenne du marché pour une année donnée.

<i>Mois</i>	<i>Cours Cuir de Fès</i>	<i>Indice du marché</i>
Janvier	1470	10972
Février	1531	11000
Mars	1429	11521
Avril	1512	10862
Mai	1487	10862
Juin	1405	11023
Juillet	1424	10337
Août	1491	10804
Septembre	1507	11003
Octobre	1537	11077
Novembre	1541	11782
Décembre	1644	12209

- 1- Calculer le β de l'action Cuir de Fès ; et donner une interprétation ;
- 2- Donner la droite du marché
- 3- Donner la rentabilité attendue de cette action, sachant que le taux des emprunts de l'Etat s'établissent à environ 5, 105% ;
- 4- Calculer la prime de risque de l'action Cuir de Fès.

Corrigé

1. Nous allons dresser un tableau dans lequel, nous procéderons au calcul de la rentabilité de l'action Cuir de Fès et de celle du marché. Grâce à ce calcul, nous allons élaborer toutes les autres informations, dont nous avons besoin pour calculer le β de l'action Cuir de Fès.

Rentabilité CDF: r_c	Rentabilité marché: r_m	$r_c - \hat{r}_c$	$r_m - \hat{r}_m$	$(r_c - \hat{r}_c) \cdot (r_m - \hat{r}_m)$	$(r_m - \hat{r}_m)^2$
4,15%	0,26%				
-6,66%	4,73%	2,94%	-0,89%	-0,03%	0,01%
5,81%	-5,72%	-7,87%	3,59%	-0,28%	0,13%
-1,65%	1,27%	4,60%	-6,87%	-0,32%	0,47%
-5,51%	0,21%	-2,86%	0,13%	0,00%	0,00%
1,35%	-6,22%	-6,72%	-0,94%	0,06%	0,01%
4,71%	4,51%	0,14%	-7,36%	-0,01%	0,54%
1,07%	1,84%	3,50%	3,37%	0,12%	0,11%
1,99%	0,67%	-0,14%	0,70%	0,00%	0,00%
0,26%	6,36%	0,78%	-0,47%	0,00%	0,00%
6,68%	3,63%	-0,95%	5,22%	-0,05%	0,27%
1,11%	1,05%	5,47%	2,48%	0,14%	0,06%
Rentabilité moyenne de CDF $r_c :$ 0,01109167	Rentabilité moyenne du marché $r_m :$ 0,01049167			Cov (r_c, r_m) : -0,00031382	Var (r_m) : 0,00134332

On déduit des calculs précédents que :

$$\hat{\beta} = \frac{\sigma_{cm}}{\sigma_m^2} = \frac{-0,00031382}{-0,00031382} = -0,23361394$$

Et $\hat{\alpha} = \hat{r}_c - \hat{\beta} \cdot \hat{r}_m = 0,01109167 + 0,23361394 \cdot 0,01049167 = 0,00864067$

Le β de Cuir de Fès est inférieur à 0, il s'agit d'un titre dont la rentabilité a tendance à fluctuer à l'inverse de l'évolution de l'indice boursier, donc de celle du marché. Ce genre de titres est considéré comme une valeur refuge permettant de réduire le risque du portefeuille.

2. La droite de régression s'écrit alors :

$$r_c = -0,23361394 r_m + 0,00864067$$

3. La rentabilité attendue de l'année suivante pour le titre CDF se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 ER_c &= 0,05105 + (-0,23361394) \cdot (0,01049167 - 0,05105) \\
 &= 0,05105 + 0,0094749912711202 \\
 &= 0,0605249912711202 \\
 \text{D'où } ER_c &= 6,0525\%
 \end{aligned}$$

Exercice d'application

Supposons que le portefeuille de marché a un rendement moyen $E(R_m) = 12\%$ et une variance $V(R_m) = 0,6$ et l'actif sans risque est rémunéré au taux certain de 6%.

1. Quelle serait l'équation du MEDAF, pour un actif i ? Que représente le MEDAF ? Que représente le bêta d'un titre ?

- L'équation du MEDAF se présente sous la forme suivante :

$$E(R_i) = R_f + \beta(E(R_m) - R_f)$$

$$E(R_m) = 12\%$$

$$\text{Avec : } R_f = 6\%$$

$$\text{D'où : } E(R_i) = 0.06 + \beta(0.12 - 0.06) = 0.06 + \beta * 0.06$$

- Le modèle d'évaluation des actifs financiers est un modèle qui détermine le rendement équivalent au risque supporté.
- Le beta représente l'élasticité du rendement du titre par rapport au rendement du marché, c'est un coefficient de sensibilité.

2. Déterminez si $E(R_i)$, le rendement moyen du titre i, est à l'équilibre, sachant que, $E(R_i) = 18\%$ et $\text{Cov}(R_i, R_m) = 0,4$.

Pour ce, on détermine le beta :

$$\beta = \frac{\text{cov}(R_i, R_m)}{V(R_m)} = \frac{0.4}{0.6} = 0.67$$

L'espérance le rendement à l'équilibre est :

$$E(R_i) = 0.06 + 0.67 * 0.06$$

$$= 10\% \neq 18\%$$

Donc le rendement moyen de ce titre n'est pas en équilibre.

3. Pourriez – vous recommander à un investisseur de faire rentrer le titre i dans son portefeuille ? Justifiez votre réponse.

Non, c'est un titre qui présente un risque supérieur, au risque qu'il devrait supporter pour le même rendement $\beta = 0.67 > 1$

4. L'équation du risque total pour le titre i est donnée par: $V(R_i) = \beta_i^2 \cdot V(R_m) + V(\varepsilon_i)$.

a. Identifiez les deux risques de cette équation. Justifiez votre réponse.

Le risque total dépend de deux risques qui sont :

- Le risque systématique qui est un risque non diversifiable et ;
- le risque spécifique qui est un risque diversifiable.

Risque systématique = Bêta * Ecart Type (Marché) = $\beta * \sigma(R_m)$

Risque spécifique = Ecart Type (Facteur résiduel) = $\sigma(\varepsilon_i)$

b. Supposons que $V(R_i) = 0,5$. Calculez le risque systématique puis le risque diversifiable. Quel est le seul risque important du point de vue du MEDAF ? Pourquoi ?

Comme $V(R_i) = \beta^2 * V(R_m) + V(\varepsilon_i)$

On a donc :

- Risque spécifique = $\sigma(\varepsilon_i) = \sqrt{V(R_i) - \beta^2 * V(R_m)} = 0,48$
- Risque systématique = $\beta * \sigma(R_m) = \sqrt{\beta^2 * V(R_m)} = \sqrt{V(R_i) - V(\varepsilon_i)} = 0,14$

Le risque systématique est souvent plus élevé que le risque spécifique. D'où l'importance du choix du marché au profit du choix des valeurs.

5. Soit un portefeuille P efficient tel que $E(R_p) = 10\%$. Utilisez le MEDAF pour calculer le bêta de ce portefeuille, son risque systématique, son risque spécifique, et son risque global.

Calcul du beta :

On a : $E(R_i) = 0,06 + \beta * 0,06$

D'après les données $E(R_p) = 10\%$

Alors : $0,1 = 0,06 + \beta * 0,06 \Rightarrow \beta = \frac{0,1 - 0,06}{0,06} = 2,67$

Risque systématique :

$\beta * \sigma(R_m) = \sqrt{\beta^2 * V(R_m)} = 2,06$

Suite du calcul ?

Exercice

Considérons deux projets d'investissement P_1 et P_2 et un portefeuille de marché M , dont les cash-flows espérés, sont présentés dans le tableau suivant, selon quatre scénarios possibles. Notons, en outre, que le capital investi est le même pour les deux projets, et que ces derniers ont une même durée d'une période.

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄
CF _{1s}	500	280	-100	-30
CF _{2s}	1000	900	-450	-150
CF _{ms}	600	700	-210	-200
p (s)	0,1	0,2	0,4	0,3

1. Calculez :
 - i. les rendements espérés des deux projets, ainsi que le rendement espéré du portefeuille du marché ;
 - ii. les bêtas des deux projets.
2. Calculez les taux de rendement des deux projets.
3. Calculez les taux de rendement prévisionnels des deux projets.
4. Déduisez la décision à prendre quant au projet à retenir.
5. Montrez que l'on peut arriver au même résultat, en appliquant la règle de la VAN.

Réponse

1.

Les rendements des trois actifs sont :

$$\begin{aligned}-r_1 &= 500.0,1 + 280.0,2 - 100.0,4 - 30.0,3 = 57 \\ -r_2 &= 1000.0,1 + 900.0,2 - 450.0,4 - 150.0,3 = 55 \\ -r_m &= 600.0,1 + 700.0,2 - 210.0,4 - 200.0,3 = 56\end{aligned}$$

La détermination des bêtas des deux projets nécessite le calcul des indicateurs suivants :

$$\begin{aligned}\sigma_{1m}^2 &= 0,1(500 - 57)(600 - 56) + 0,2.(280 - 57)(700 - 56) + \\ &0,4.(-100 - 57).(-210 - 56) + 0,3.(-30 - 57)(-200 - 56) = 76208\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{2m}^2 &= 0,1(1000 - 55)(600 - 56) + 0,2.(900 - 55)(700 - 56) + \\ &0,4.(-450 - 55).(-210 - 56) + 0,3.(-150 - 55)(-200 - 56) = 229720\end{aligned}$$

$$\sigma_m^2 = 0,1(600 - 56)^2 + 0,2.(700 - 56)^2 + 0,4.(-210 - 56)^2 + 0,3.(-200 - 56)^2 = 160504$$

Donc : $\beta_1 = \frac{76208}{160504} = 0,47$; $\beta_2 = \frac{229720}{160504} = 1,43$

2. Les taux de rendement exigés des deux projets :

Pour calculer ces taux, nous avons besoin de calculer le taux de rendement du marché.

Soit : $E(r_m) = \frac{56}{50} - 1 = 0,12$

- le taux de rendement de P_1 est : $E(r_1) = 0,08 + 0,47.(0,12 - 0,08) = 9,88\%$

- le taux de rendement de P_2 est :

3. les taux de rendement prévisionnel des deux projets:

$$TP(r_1) = \frac{57}{50} - 1 = 14\%; \quad TP(r_2) = \frac{55}{50} - 1 = 10\%$$

4. On remarque que :

- le taux de rendement prévisionnel de P_1 est supérieur au taux de rendement exigé par les actionnaires. P_1 est donc intéressant à réaliser pour ces derniers ;
- le taux de rendement prévisionnel de P_2 est inférieur au taux de rendement exigé par les actionnaires. P_2 n'est donc pas intéressant pour ces derniers ;

5. Calcul de la VAN :

$$VAN_1 = \frac{57}{1,988} - 50 = 1,87\text{DH} \quad ; \quad VAN_2 = \frac{55}{1,137} - 50 = -1,62\text{DH}$$