

1.- Calcula a sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln \ln(1-x)} - \frac{ax-1}{x} \right) = \frac{7}{2}$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Resolución

Hacemos la resta de las fracciones. El mcm de los denominadores es $x \ln(1-x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot x - (ax-1) \ln \ln(1-x)}{x \ln \ln(1-x)} = \frac{0 - (a \cdot 0 - 1) \ln \ln(1-0)}{0 \ln \ln(1-0)} = \frac{0 + \ln \ln 1}{0} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación.}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital con $f(x) = x - (ax-1) \ln(1-x)$, $g(x) = x \ln(1-x)$

$$f'(x) = 1 - [a \ln \ln(1-x) + (ax-1) \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1)] = 1 - a \ln \ln(1-x) + \frac{ax-1}{1-x}$$

$$g'(x) = 1 \cdot \ln \ln(1-x) + x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = \ln \ln(1-x) - \frac{x}{1-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \ln \ln(1-x) + \frac{ax-1}{1-x}}{\ln \ln(1-x) - \frac{x}{1-x}} = \frac{1 - a \ln \ln(1-0) + \frac{a \cdot 0 - 1}{1-0}}{\ln \ln(1-0) - \frac{0}{1-0}} = \frac{1 - a \cdot 0 - 1}{0-0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación.}$$

Volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$f''(x) = \left(1 - a \ln \ln(1-x) + \frac{ax-1}{1-x} \right)' = -a \frac{1}{1-x} \cdot (-1) + \frac{a(1-x) - (ax-1)(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{a}{1-x} + \frac{a - ax + ax - 1}{(1-x)^2} = \frac{a(1-x) + (a-1)}{(1-x)^2} = \frac{2a - ax - 1}{(1-x)^2} = \frac{2a - 1 - ax}{(1-x)^2}$$

$$g''(x) = \left[\ln \ln(1-x) - \frac{x}{1-x} \right]' = \frac{1}{1-x} \cdot (-1) - \frac{1(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{-1(1-x) - 1}{(1-x)^2} = \frac{x-2}{(1-x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2a-1-ax}{(1-x)^2}}{\frac{x-2}{(1-x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a-1-ax}{x-2} = \frac{2a-1}{-2} = \frac{1-2a}{2}.$$

Luego, por la regla de L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1-2a}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2a}{2}$

Como nos dicen que el límite es $\frac{7}{2}$, entonces $\frac{1-2a}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow 1 - 2a = 7 \Rightarrow -6 = 2a \Rightarrow a = -3$

2.- Sea f la función definida por $f(x) = \frac{-x^3 + 2x - 3}{x^2 - x}$, para $x \neq 0, x \neq 1$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(2, 3 \ln 2)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano.

Resolución

El conjunto de todas las primitivas de f es $I = \int \frac{-x^3 + 2x - 3}{x^2 - x} dx$

Haciendo la división obtenemos la forma mixta de la fracción: $\frac{-x^3 + 2x - 3}{x^2 - x} = -x - 1 + \frac{x-3}{x^2-x}$

$$\text{Luego, } I = \int (-x - 1) dx + \int \frac{x-3}{x^2-x} dx = \frac{-x^2}{2} - x + \int \frac{x-3}{x^2-x} dx \quad I_1$$

Para calcular I_1 descomponemos la fracción en suma de fracciones simples: Como $x^2 - x = x(x-1)$,

$$\frac{x-3}{x^2-x} = \frac{x-3}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}. \text{ Multiplicando los dos miembros por } x(x-1): x-3 = A(x-1) + Bx$$

Para $x = 1 \rightarrow -2 = A(1-1) + B \cdot 1 \Rightarrow -2 = B$; Para $x = 0, \rightarrow -3 = A(0-1) + B \cdot 0 \Rightarrow -3 = -A \Rightarrow A = 3$

$$I_1 = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{-2}{x-1} \right) dx = 3 \ln |x| - 2 \ln |x-1|. \text{ Luego, todas las primitivas de } f \text{ son}$$

$$F_k(x) = I = \frac{-x^2}{2} - x + 3 \ln |x| - 2 \ln |x-1| + k, \text{ siendo } k \in \mathbb{R} \text{ una constante.}$$

Si la primitiva pasa por $(2, 3 \ln 2)$,

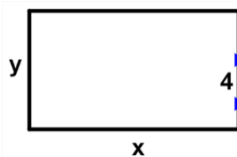
$$F_k(2) = 3 \ln 2 \Rightarrow \frac{-2^2}{2} - 2 + 3 \ln 2 - 2 \ln |2-1| + k = 3 \ln 2$$

$$\frac{-2^2}{2} - 2 + 3 \ln 2 - 2 \ln 1 + k = 3 \ln 2 \Rightarrow k = 4. \text{ La primitiva es}$$

$$F(x) = \frac{-x^2}{2} - x + 3 \ln |x| - 2 \ln |x-1| + 4$$

3.- Una familia desea acotar una zona rectangular en el jardín de su casa para dedicarla al cultivo ecológico. Para ello dispone de 96 metros de valla, pero necesita dejar una abertura de 4 metros en uno de los laterales para instalar una puerta. Determina las dimensiones de la zona rectangular de área máxima que puede acotarse de esta manera y el valor de dicha área.

Resolución



Sean x e y las dimensiones de la zona rectangular

Función a maximizar: área = xy . Pero como disponemos de 96 m de valla, $2x + 2y - 4 = 96$.

De donde, $2x + 2y = 100 \rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$.

Se trata de calcular el máximo de la función $A(x) = x(50 - x) \rightarrow A(x) = 50x - x^2$

$$A'(x) = 50 - 2x \Rightarrow A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50}{2} = 25$$

Vamos a comprobar que $x = 25$ corresponde al máximo de la función.

$$A''(x) = -2 \rightarrow A''(25) = -2 < 0 \rightarrow \text{máximo. Luego, } x = 25, y = 50 - 25 = 25$$

Las dimensiones de la zona son entonces 25 m x 25 m (es un cuadrado)

4.- Calcula $\int \ln \ln (x^2 + 2x + 2) dx$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = x + 1$).

Resolución

Hacemos el cambio de variable que se sugiere: $t = x + 1, dt = 1 dx = dx$

Por otra parte, $t^2 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Luego $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = t^2 + 1$

Sustituyendo nos queda la integral $\int \ln \ln (t^2 + 1) dt$, que la vamos a resolver usando el método de integración por partes: $\left[u = \ln \ln (t^2 + 1) \Rightarrow du = \frac{2t dt}{t^2 + 1} dv = dt \Rightarrow v = t \right]$.

Nos quedaría que

$$\int \ln \ln (t^2 + 1) dt = t \ln \ln (t^2 + 1) - 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} = t \ln \ln (t^2 + 1) - 2 \int \frac{(t^2 + 1 - 1) dt}{t^2 + 1} =$$

$$= t \ln \ln (t^2 + 1) - 2 \int \left(1 dt - \frac{1 dt}{t^2 + 1} \right) = t \ln \ln (t^2 + 1) - 2t + 2 \arctg t =$$

$$= t[\ln \ln (t^2 + 1) - 2] + 2 \arctg t \quad \text{deshaciendo el cambio} \rightarrow (x + 1)[\ln \ln (x^2 + 2x + 2) - 2] + 2 \arctg(x + 1) + k, \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Luego, $\int \ln \ln (x^2 + 2x + 2) dx = (x + 1)[\ln \ln (x^2 + 2x + 2) - 2] + 2 \arctg(x + 1) + k, \text{ con } k \in \mathbb{R}$

5.- Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - (1+x) - (a+1)x}{x^2}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Resolución

Vamos a hallar el límite. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - (1+x) - (a+1)x}{x^2} = \frac{0e^0 - \ln \ln (1+0) - (a+1)0}{0^2} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Aplicamos la regla de L'Hôpital con $f(x) = xe^x - \ln(1+x) - (a+1)x$, $g(x) = x^2$.

$$f'(x) = 1e^x + xe^x - \frac{1}{1+x} \cdot 1 - (a+1) = (1+x)e^x - \frac{1}{1+x} - a - 1, \quad g'(x) = 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)e^x - \frac{1}{1+x} - a - 1}{2x} = \frac{(1+0)e^0 - \frac{1}{1+0} - a - 1}{2 \cdot 0} = \frac{1 - 1 - a - 1}{0} = \frac{-a - 1}{0}$$

Por tanto, por la regla de L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-a - 1}{0}$

Como queremos que el límite sea finito, debe ser $-a - 1 = 0$ porque de lo contrario el límite valdría $\pm\infty$. Luego, $-a - 1 = 0$, $a = -1$

Veamos si se puede aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$\frac{\left[(1+x)e^x - \frac{1}{1+x} - (-1) - 1 \right]'}{[2x]'} = \frac{1 \cdot e^x + (1+x)e^x - \frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1 + 1 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$

Se puede aplicar. Por tanto, el límite del enunciado, para $a = -1$, vale $\frac{3}{2}$

6.- Determina la función $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto $(0, 1)$, $f'(0) = 0$ y $f''(x) = \frac{1}{x+1}$

Resolución

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1| + a, \text{ con } a \in \mathbb{R}. \text{ Como } f'(0) = 0 \Rightarrow \ln|0+1| + a = 0$$

Se tiene, $0 + a = 0$, $a = 0$. Luego, $f'(x) = \ln|x+1|$

$f(x) = \int f'(x)dx = \int \ln \ln|x+1|dx$ que la vamos a resolver usando el método de integración por partes:

$$\left[u = \ln \ln|x+1| \Rightarrow du = \frac{dx}{x+1} \quad dv = dx \Rightarrow v = x \right].$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du = x \ln \ln|x+1| - \int \frac{x dx}{x+1}; \quad I = \int \frac{(x+1-1) dx}{x+1} = \int 1 dx - \int \frac{1 dx}{x+1} = x - \ln|x+1| + C$$

Luego, $f(x) = x \ln|x+1| - [x - \ln|x+1|] = x \ln|x+1| - x + \ln|x+1| + b = (x+1)\ln|x+1| + b - x$.

Como la gráfica de f pasa por $(0, 1)$, entonces $f(0) = 1 \Rightarrow (0+1)\ln|0+1| + b - 0 = 1 \Rightarrow b = 1$.

Por tanto, $f(x) = x \ln|x+1| - x + \ln|x+1| + 1$

7.- Sea f la función definida por $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$, para $x \neq 2$

a) Estudia la derivabilidad de f .

Resolución

Expresamos la función como una función definida a trozos:

$$f(x) = \left\{ \frac{x}{2-x}, \text{ si } x \geq 0, x \neq 2 \quad \frac{-x}{2-x}, \text{ si } x < 0 \right.$$

- Si $x \neq 0, x \neq 2$, f es derivable por ser el resultado de operar con funciones derivables.

Además,

$$\text{Si } x > 0, x \neq 2, f'(x) = \frac{1 \cdot (2-x) - x \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} \quad \text{Si } x < 0, f'(x) = \frac{-1 \cdot (2-x) + x \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{-2}{(2-x)^2}. \text{ Luego, } f'(x) =$$

- Para $x = 2$, f no es ni continua ni derivable porque no está definida: no existe $f(2)$

$$\text{- Para } x = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{2-x} = \frac{0}{2-0} = 0 = f(0). \text{ Luego, } f \text{ es continua en } x = 0$$

$$[f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{(2-x)^2} = \frac{-2}{(2-0)^2} = \frac{-1}{2} \quad f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-0)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+)]$$

f no es derivable en $x = 0$

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Resolución

$$f'(x) = \left\{ \frac{2}{(2-x)^2}, \text{ si } x > 0, x \neq 2 \quad \frac{-2}{(2-x)^2}, \text{ si } x < 0 \right. \text{ Como } \frac{2}{(2-x)^2} > 0 \text{ y } \frac{-2}{(2-x)^2} < 0, \forall x, \text{ resulta}$$

que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $f'(x) > 0$ para $x > 0, x \neq 2$.

Luego, f es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$

8.- Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -4x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + c$.

a) Halla el valor de c sabiendo que sus gráficas se cortan en el punto en el que g alcanza su máximo.

Resolución

Halleamos el punto en el que g alcanza su máximo.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$; $g''(x) = -2 < 0 \Rightarrow g''(1) = -2 < 0$. En $x = 1$ g alcanza su máximo.

Como se cortan para $x = 1$, $f(1) = g(1) \Rightarrow -4 \cdot 1 + 2 = -1^2 + 2 \cdot 1 + c \Rightarrow -2 = -1 + 2 + c \Rightarrow c = -3$

b) Para $c = -3$, calcula el área de la región limitada por ambas gráficas.

Resolución

Para $c = -3$, $f(x) = -4x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x - 3$.

Halleamos las abscisas de los puntos de corte entre las gráficas de f y g :

$$\{y = -4x + 2 \text{ y } y = -x^2 + 2x - 3 \Rightarrow -4x + 2 = -x^2 + 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 5 \text{ o } x = 1$$

El área que nos piden es $A = \left| \int_1^5 [f(x) - g(x)] dx \right|$.

Hallamos primero una primitiva: $\int [f(x) - g(x)] dx = \int [-4x + 2 + x^2 - 2x + 3] dx =$

$$= \int (x^2 - 6x + 5) dx. \text{ Una primitiva es } p(x) = \frac{x^3}{3} - 6 \frac{x^2}{2} + 5x = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x = \frac{x^3 - 9x^2 + 15x}{3}$$

Por la regla de Barrow, $A = |p(5) - p(1)| = \left| \frac{5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5}{3} - \frac{1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1}{3} \right| = \left| \frac{-25}{3} - \frac{7}{3} \right| = \frac{32}{2} u^2$

9.- Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$, para $x \neq 1$, $x \neq -1$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .

Resolución

Como $f(x) = \frac{(-1)^3}{(-1)^2 - 1} = \frac{-1}{0} = \pm \infty$ y $f(x) = \frac{1^3}{1^2 - 1} = \frac{1}{0} = \pm \infty$, f tiene dos asíntotas

verticales, de ecuaciones $x = -1$, $x = 1$. Además, $f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ y $f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

y $f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ y $f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Estudiemos las asíntotas en $\pm \infty$:

$f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x = \pm \infty$. Luego, f tiene o no tiene asíntota horizontal en $\pm \infty$.

Veamos si tiene asíntota oblicua: AO: $y = mx + n$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^3}{x^2 - 1}}{x} = \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$$

$$[f(x) - mx] = \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

Luego, la asíntota oblicua en $\pm \infty$ es la recta de ecuación AO: $y = x$

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota: $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{x}{x^2 - 1}$

Si $x \rightarrow +\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0$. Luego, la gráfica está "por encima" de la asíntota en $+\infty$

Si $x \rightarrow -\infty$, $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} < 0$. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en $-\infty$

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Resolución

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	-	+
$f(x)$	creciente	máximo	decrec.	decrec.	mínimo	creciente

10.- Determina la única función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ y $f''(x) = e^x(x+2)$.

Resolución

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int e^x(x+2) dx \quad \text{por partes} \rightarrow [u = x+2 \Rightarrow du = 1 \cdot dx \quad dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x]$$

$$f'(x) = \int u dv = u \cdot v - \int v du = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + k = (x+2-1)e^x + k = (x+1)e^x + k$$

Como $f'(0) = 1$ entonces $(0+1)e^0 + k = 1 \Rightarrow 1 + k = 1, k = 0$. Por tanto, $f'(x) = (x+1)e^x$.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int e^x(x+1) dx \quad \text{por partes} \rightarrow [u = x+1 \Rightarrow du = 1 \cdot dx \quad dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x]$$

$$f(x) = (x+1)e^x - \int e^x dx = (x+1)e^x - e^x + k' = (x+1-1)e^x + k' = xe^x + k'$$

Como $f(0) = 1 \Rightarrow 0e^0 + k' = 1 \Rightarrow k' = 1$. Por tanto, $f(x) = xe^x + 1$

11.- Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un punto crítico en $x = 0$, que su gráfica pasa por $(0, 3)$ y que la recta $y = -2x + 2$ es tangente a dicha gráfica en el punto de abscisa $x = 1$. Calcula a, b, c y d .

Resolución

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Como f tiene un punto crítico, extremo relativo, en $x = 0$, $f'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

Como la gráfica pasa por $(0, 3)$, $f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 3 \Rightarrow d = 3$

Nos queda $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$.

Como la recta $y = -2x + 2$ es la recta tangente en $x = 1$ y $f'(1)$ es la pendiente de la recta tangente, entonces $f'(1) = -2$. Luego, $3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = -2 \Rightarrow 3a + 2b = -2$

La recta tangente y la gráfica de f coinciden en $x = 1$

Luego, $f(1) = -2 \cdot 1 + 2 = 0 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 3 = 0 \Rightarrow a + b = -3$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 3a + 2b = -2 \\ a + b = -3 \end{cases} \cdot 2 \rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = -2 \\ 2a + 2b = -6 \end{cases}$

Restando las ecuaciones, $a = 4$

Sustituyendo, $4 + b = -3$, luego $b = -7$. Conclusión: $a = 4, b = -7, c = 0, d = 3$

12.- Calcula el valor de $a > 0$ para que el área comprendida entre la parábola $y = 3x^2 - 2ax$ y el eje de abscisas sea 4 unidades cuadradas.

Resolución

Hallamos los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas:

$$3x^2 - 2ax = 0 \Leftrightarrow x(3x - 2a) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad 3x - 2a = 0 \Rightarrow x = \frac{2a}{3}$$

El área comprendida entre la parábola y el eje de abscisas es $A = \left| \int_0^{\frac{2a}{3}} (3x^2 - 2ax) dx \right|$.

Una primitiva de la función $f(x) = 3x^2 - 2ax$ es $F(x) = \int (3x^2 - 2ax) dx = 3 \frac{x^3}{3} - 2a \frac{x^2}{2} = x^3 - ax^2$

Por la regla de Barrow, $A = \left| p\left(\frac{2a}{3}\right) - p(0) \right| = \left| \left(\frac{2a}{3}\right)^3 - a\left(\frac{2a}{3}\right)^2 - (0^3 - a \cdot 0^2) \right| = \left| \frac{8a^3 - 12a^3}{27} \right| = \frac{4a^3}{27}$

Como el área debe ser 4 u², entonces $\frac{4a^3}{27} = 4 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = \sqrt[3]{27} \Rightarrow a = 3$

13.- (prueba extraordinaria) Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 6)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.

Resolución

$$f'(x) = e^x(x^2 - 5x + 6) + e^x(2x - 5) = e^x(x^2 - 3x + 1) \quad ; \quad f''(x) = e^x(x^2 - 3x + 1) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 2)$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 2 \quad x = -1$. Hagamos una tabla de signos de $f''(x)$:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	convexa	inflexión	cóncava	inflexión	convexa

f es convexa en $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ y cóncava en el intervalo $(-1, 2)$

Los puntos de inflexión son:

$x = -1, y = f(-1) = e^{-1}[(-1)^2 - 5(-1) + 6] = 12e^{-1} = \frac{12}{e}$. Punto $\left(-1, \frac{12}{e}\right)$

$x = 2, y = f(2) = e^2(2^2 - 5 \cdot 2 + 6) = 0e^2 = 0$. Punto $(2, 0)$

14.- (prueba extraordinaria) Calcula $\int_0^{\pi} x \sen^2 x \, dx$

Resolución

Hallamos una primitiva,

$F(x) = \int x \sen^2 x \, dx$ por partes $\rightarrow \left[u = x \Rightarrow du = dx \quad dv = \sen^2 x \, dx \Rightarrow v = \int \sen^2 x \, dx \right]$

$v = \int \sen^2 x \, dx = \int \sen x \cdot \sen x \, dx$ por partes $\rightarrow \left[u_1 = \sen x \Rightarrow du_1 = \cos x \, dx \quad dv_1 = \sen x \, dx \Rightarrow v_1 = \int \sen x \, dx = -\cos x \right]$

$v = -\sen x \cos x + \int x \cos x \, dx = -\sen x \cos x + \int (1 - \sen^2 x) \, dx = -\sen x \cos x + x - v = \frac{-\sen(2x)}{2}$

Luego, $2v = x - \frac{\sen(2x)}{2} = \frac{2x - \sen(2x)}{2} \Rightarrow v = \frac{2x - \sen(2x)}{4}$. Volviendo a la primera integral:

$F(x) = x \frac{2x - \sen(2x)}{4} - \frac{1}{4} \int (2x - \sen(2x)) \, dx \Big|_0^{\pi} ; I_1 = 2 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) = \frac{2x^2 + \cos(2x)}{2}$

$$F(x) = \frac{2x^2 - x \sin(2x)}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2x^2 + (2x)}{2} = \frac{4x^2 - 2x \sin(2x) - 2x^2 - \cos(2x)}{8} = \frac{2x^2 - 2x \sin(2x) - \cos(2x)}{8}$$

Por la regla de Barrow,

$$\int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx = F(\pi) - F(0) = \frac{2\pi^2 - 2\pi \sin(2\pi) - \cos(2\pi)}{8} - \frac{2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \sin(2 \cdot 0) - \cos(2 \cdot 0)}{8} = \frac{2\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

15.- (prueba extraordinaria) Sea la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida

por $f(x) = \begin{cases} e^{2ax-4b}, & \text{si } x < 1 \\ 1 - x \ln \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina los valores de a y b .

Resolución

Para $x \neq 1$,

$$f'(x) = \begin{cases} e^{2ax-4b} \cdot 2a, & \text{si } x < 1 \\ -1 - \ln \ln x + (-x) \cdot \frac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ae^{2ax-4b}, & \text{si } x < 1 \\ -1 - \ln \ln x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{2ax-4b} = e^{2a \cdot 1 - 4b} = e^{2a-4b} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x \ln \ln x) = 1 - 1 \ln \ln 1 = 1 - 1 \cdot (-\infty) = +\infty$$

Puesto que es derivable en $x = 1$, también es continua. Luego, $e^{2a-4b} = 1 \Rightarrow 2a - 4b = 0$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ae^{2ax-4b}) = 2ae^{2a \cdot 1 - 4b} = 2ae^{2a-4b}$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1 - \ln \ln x) = -1 - \ln \ln 1 = -1 - 0 = -1$$

$$\text{Como es derivable en } x = 1, f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 2ae^{2a-4b} = -1$$

$$\text{Como } 2a - 4b = 0 \Rightarrow 2ae^0 = -1 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Sustituyendo, } 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4b = 0 \Rightarrow -1 - 4b = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}.$$

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Resolución

$$\text{La ecuación de la rtg en } x_0 \text{ es } r_{tg}: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow r_{tg}: y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{Para esta función, } x_0 = 2, \quad f(x_0) = f(2) = 1 - 2 \ln 2 \quad f'(x_0) = f'(2) = -1 - \ln \ln 2$$

$$r_{tg}: y = (-1 - \ln \ln 2)(x - 2) + 1 - 2 \ln 2 \Rightarrow r_{tg}: y = (-1 - \ln \ln 2)x + 3$$

16.- (prueba extraordinaria) Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza el recinto que determinan.

b) Determina el área del recinto anterior.

Resolución

Los puntos de corte se hallan resolviendo el sistema: $\begin{cases} y = |x| \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$

$$|x| = x^2 - 2; x \geq 0, x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 2 \rightarrow y = |2| = 2. \text{ Punto } (2, 2) \quad x = -1 \text{ (imposible)} \quad x < 0, -x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ (imposible)}$$

Para hacer un esbozo de la gráfica de $f(x) = |x|$ tengamos en cuenta que

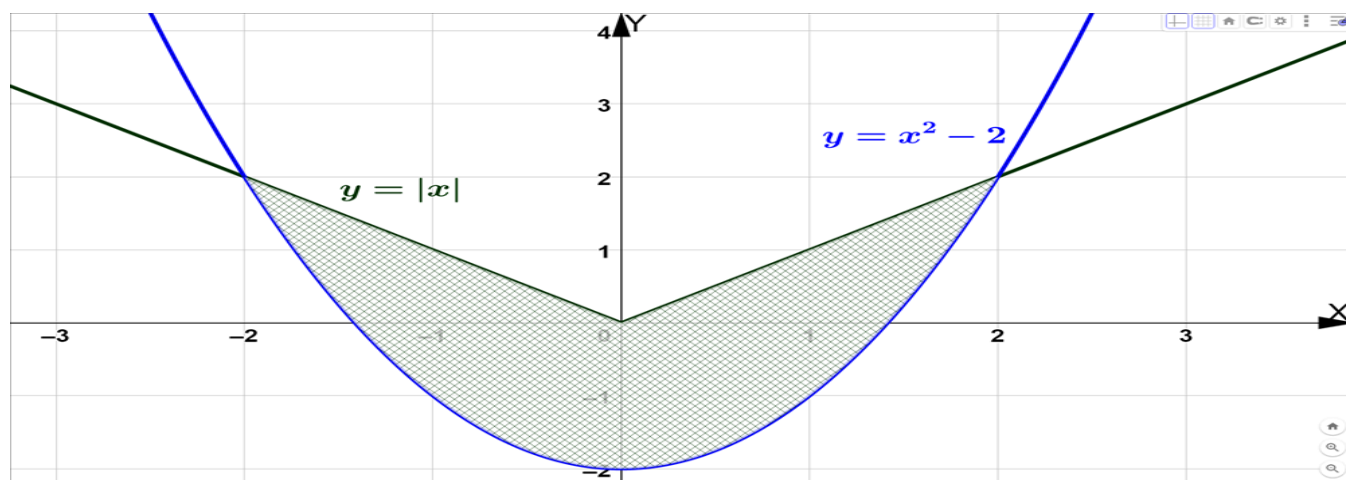
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para la gráfica de $g(x) = x^2 - 2$, tengamos en cuenta que $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $g''(0) = 2 > 0$. Luego, en $x = 0$ g tiene un mínimo.

El mínimo es $x = 0$, $y = g(0) = 0^2 - 2 = -2$; El mínimo $(0, -2)$, que es el vértice de la parábola y además coincide con el punto de corte de la parábola con el eje Y.

Por otra parte, como $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, los puntos donde corta la parábola al eje X son $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$



Debido a la simetría de las gráficas, el área es $A = 2 \int_0^2 [x - (x^2 - 2)] dx = \int_0^2 (2x - 2x^2 + 4) dx$.

Una primitiva de la función del integrando es $p(x) = x^2 - \frac{2x^3}{3} + 4x = \frac{3x^2 - 2x^3 + 12x}{3}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(2) - p(0) = \frac{3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2}{3} - \frac{3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 + 12 \cdot 0}{3} = \frac{20}{3} \cong 6,67 \text{ u}^2$

17.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (5 - x)e^{x-4}$. Determina los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente tiene pendiente máxima.

Resolución

Sea $P(x, f(x))$ un punto de la gráfica. La pendiente de la recta tangente en el punto P es

$$f'(x) = -1 \cdot e^{x-4} + (5 - x) \cdot e^{x-4} \cdot 1 = (-1 + 5 - x) e^{x-4} = (4 - x) e^{x-4}$$

Se trata de hallar el máximo de la función $f'(x)$.

$$f''(x) = -1 \cdot e^{x-4} + (4 - x) \cdot e^{x-4} \cdot 1 = (-1 + 4 - x) e^{x-4} = (3 - x) e^{x-4} = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Hagamos una tabla de signos de $f''(x)$:

	$(-\infty, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	creciente	máximo	decreciente

Luego, en $x = 3$ $f'(x)$ alcanza el valor máximo, $f(3) = (5 - 3)e^{3-4} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$. El punto es $P\left(3, \frac{2}{e}\right)$

18.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$

a) Calcula $\int f(t)dt$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $x = 1 + e^t$).

Resolución

$I = \int f(t)dt$. Hacemos el cambio de variable que se sugiere: $x = 1 + e^t \Rightarrow x - 1 = e^t$.

$$\text{Derivando, } 1dx = e^t dt = (x - 1)dt \Rightarrow dt = \frac{dx}{x-1}$$

Sustituyendo nos queda la integral $\int \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x-1} = \int \frac{dx}{x(x-1)}$. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \quad \cdot \quad x(x-1) \rightarrow 1 = A(x-1) + Bx$$

Para $x = 0 \Rightarrow 1 = A(0 - 1) + B \cdot 0$, $A = -1$; Para $x = 1 \Rightarrow 1 = A(1 - 1) + B \cdot 1$, $B = 1$

Luego, $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$; $I = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -\ln |x| + \ln |x-1| + k$, con $k \in \mathbb{R}$

Deshaciendo el cambio de variable, nos queda $I = -\ln \ln(1 + e^t) + \ln \ln e^t + k = \ln \ln \frac{e^t}{1+e^t} + k$, con $k \in \mathbb{R}$.

b) Se define $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

Resolución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \quad g \text{ es continua en } x = 0 \rightarrow \frac{g(0)}{0} = \frac{\int_0^0 f(t) dt}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Por L'Hôpital,

$$g'(x) = \left[\int_0^x f(t) dt \right]' \quad \text{teorema fundamental del cálculo} \rightarrow f(x) = \frac{1}{1+e^x}; (x)' = 1$$

Nos queda, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+e^x}}{1} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$. Luego, por la regla de L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$

19.- Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ tiene un punto crítico en $x = 2$ y que la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Calcula a , b y c .

Resolución

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Como f tiene un punto crítico (o sea un extremo relativo) en $x = 2$, $f'(2) = 0$.

$$\text{Luego, } 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$$

Como la recta normal en $x = 1$ es $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, entonces $\frac{-1}{f'(1)} = \frac{1}{2}$, $f'(1) = -2$.

Luego, $3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = -2 \Rightarrow 3a + 2b + c = -2$

Para $x = 1$ la recta y la gráfica coinciden y como $f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} = 2$, entonces $a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 - 1 = 2$,
de donde $a + b + c = 3$

Nos queda el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 12a + 4b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = -2 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$.

Se puede resolver, por ejemplo, por la regla de Cramer.

matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$A_b = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_c = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\det A = 24 + 4 + 3 - 2 - 12 - 12 = 5$, $\det A_a = 12 - 2 - 6 + 8 = 12$, $\det A_b = -24 + 9 + 2 - 36 = -49$

$\det A_c = 72 - 8 - 36 + 24 = 52$. Luego, $a = \frac{|A_a|}{|A|} = \frac{12}{5}$, $b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{-49}{5}$, $c = \frac{|A_c|}{|A|} = \frac{52}{5}$

20.- Calcula $\int \cos \cos (\ln \ln x) dx$

Resolución

$I = \int \cos \cos (\ln \ln x) dx$ por partes $\rightarrow \begin{cases} u = \cos \cos (\ln \ln x) \Rightarrow du = \frac{-\sin(\ln \ln x)}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$I = \int u dv = u \cdot v - \int v du = x \cos \cos (\ln \ln x) + \int \frac{\sin(\ln \ln x)}{x} dx$ I_1

$I_1 = \int \sin(\ln \ln x) dx$ por partes $\rightarrow \begin{cases} u = \sin(\ln \ln x) \Rightarrow du = \frac{\cos(\ln \ln x)}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$I_1 = \sin(\ln \ln x) - \int \cos \cos (\ln \ln x) dx$

Luego, $I = x \cos \cos (\ln \ln x) + \sin(\ln \ln x) - I \Rightarrow 2I = x \cos \cos (\ln \ln x) + \sin(\ln \ln x)$.

$I = \frac{x \cos \cos (\ln \ln x) + \sin(\ln \ln x)}{2} + k$, con $k \in \mathbb{R}$

21.- (prueba ordinaria) Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$, para $x \neq 1, -1$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .

Resolución

$$-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1, = -1; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{-4}{0} = \pm\infty \Rightarrow A.V.: x = 1. \text{ Además,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{0}{0} = \text{Indet.} \quad \frac{1-2-3-1-131-30}{1-2-3-1-131-30} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

No hay AV en -1

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 = 1 \Rightarrow A.H.: y = 1.$$

$$\text{Además, } y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} - 1 = \frac{x^2-2x-3-(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{-2x-2}{x^2-1}$$

es < 0, cuando $x \rightarrow +\infty$ es > 0, cuando $x \rightarrow -\infty$

Luego, la gráfica está debajo de la asíntota en $+\infty$ y por encima en $-\infty$

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Resolución

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-1) - (x^2-2x-3)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^2+2-2x^3+4x^2+6x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2+4x+2}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2+2x+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x+1)^2}{(x^2-1)^2} > 0, \text{ para } x \neq 1, -1. \text{ Luego, f es creciente.}$$

22.- (prueba ordinaria) Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$

Resolución

Puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas (eje X):

$$xe^{3x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad e^{3x} = 0 \text{ (imposible) . Punto } (0, 0)$$

$$\text{El área a la que se hace referencia es } A = \int_0^a f(x) dx$$

Una primitiva de f(x) es

$$F(x) = \int f(x) dx = \int xe^{3x} dx \quad \text{por partes} \rightarrow \left[u = x \rightarrow du = dx \quad dv = e^{3x} dx \rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \right]$$

$$\text{Aplicando la integración por partes, } F(x) = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx$$

$$F(x) = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}e^{3x} = \frac{(3x-1)e^{3x}}{9}. \text{ Por la regla de Barrow,}$$

$$A = p(a) - p(0) = \frac{(3a-1)e^{3a}}{9} - \frac{(3\cdot 0-1)e^{3\cdot 0}}{9} = \frac{(3a-1)e^{3a} + 1}{9}.$$

$$\text{Como } A = \frac{1}{9} \Rightarrow (3a-1)e^{3a} + 1 = 1$$

$$\text{Nos queda, } (3a-1)e^{3a} = 0 \Rightarrow 3a-1 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{3}e^{3a} = 0 \text{ (imposible)}$$

23.- (prueba ordinaria) Sea $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \operatorname{csc} x}$

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Resolución

$$f'(x) = \frac{x(2 - \operatorname{csc} x) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{(2 - \operatorname{csc} x)^2} = \frac{2\operatorname{csc} x - x - \operatorname{sen}^2 x}{(2 - \operatorname{csc} x)^2} = \frac{2\operatorname{csc} x - 1}{(2 - \operatorname{csc} x)^2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

Luego, $x = \arccos \left(\frac{1}{2}\right)$. Y como $x \in [0, 2\pi]$ entonces $x = \frac{\pi}{3}$ ó $x = \frac{5\pi}{3}$ (posibles extremos relativos)

Para obtener los extremos absolutos evaluamos $f(x)$ en $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = \frac{5\pi}{3}$:

$$f(0) = \frac{\operatorname{sen} 0}{2 - \operatorname{csc} 0} = 0 \quad ; \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2 - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 0,577$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{2 - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cong -0,577 \quad ; \quad f(2\pi) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi)}{2 - (2\pi)} = 0$$

Por tanto, el máximo absoluto es $\frac{\sqrt{3}}{3}$ y se alcanza en $x = \frac{\pi}{3}$ y el mínimo absoluto es $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y

se alcanza en $x = \frac{5\pi}{3}$.

b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$

Resolución

La recta tangente pasa por el punto $P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y la pendiente de la recta tangente en el punto P

es $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, porque en $x = \frac{\pi}{3}$ hay un máximo.

La ecuación de la recta tangente es $y - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow r_{tg}: y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

La ecuación de la recta normal es $y - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-1}{0}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 0 = -x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow r_n: x = \frac{\pi}{3}$

24.- (prueba ordinaria) Sea f la función dada por $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x-2)^2}$, para $x \neq 2$

a) Calcula $\int f(x)dx$

Resolución

Haciendo la división obtenemos la forma mixta de la fracción: $f(x) = 3 + \frac{12x-8}{(x-2)^2}$

$$\int f(x) dx = \int 3dx + \int \frac{12x-8}{(x-2)^2} dx = 3x + \int \frac{12x-8}{(x-2)^2} dx \quad I$$

Para hallar I descomponemos primero la fracción en fracciones simples.

$$\frac{12x-8}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \quad \cdot (x-2)^2 \rightarrow 12x-8 = A(x-2) + B$$

$$\text{Para } x = 2 \Rightarrow 12 \cdot 2 - 8 = A(2-2) + B \Rightarrow B = 16$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow 12 \cdot 0 - 8 = A(0-2) + B = -2A + 16 \Rightarrow -8 = -2A + 16 \Rightarrow A = 12$$

$$\text{Luego, } \frac{12x-8}{(x-2)^2} = \frac{12}{x-2} + \frac{16}{(x-2)^2}$$

$$I = \int \frac{12x-8}{(x-2)^2} dx = 12 \int \frac{1}{x-2} dx + 16 \int \frac{1}{(x-2)^2} dx = 12 \ln |x-2| + 16 \frac{-1}{x-2} = 12 \ln |x-2| - \frac{16}{x-2}$$

$$\text{Por tanto, } \int f(x)dx = 3x + 12 \ln |x-2| - \frac{16}{x-2} + k$$

b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3, 5)$.

Resolución

$$\text{Las primitivas de } f(x) \text{ son } F(x) = \int f(x)dx = 3x + 12 \ln |x-2| - \frac{16}{x-2} + k.$$

Si pasa por $(3, 5)$ entonces $F(3) = 5$.

$$\text{Luego, } 3 \cdot 3 + 12 \ln |3-2| - \frac{16}{3-2} + k = 5 \Rightarrow 9 + 12 \ln 1 - 16 + k = 5$$

$$\text{Simplificando, } 9 + 12 \cdot 0 - 16 + k = 5 \Rightarrow k = 12.$$

La primitiva que nos piden es $F(x) = 3x + 12 \ln \ln |x - 2| - \frac{16}{x-2} + 12$