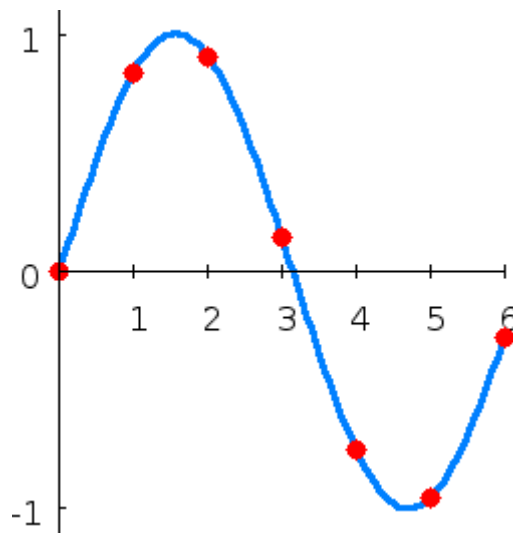


Interpolation polynômiale

Introduction

Étant donné un ensemble de $n+1$ points (x_i, y_i) , les x_i distincts 2 à 2, nous cherchons un polynôme p à coefficients réels de degré n au plus qui vérifie :

$$p(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n$$



Les points rouges correspondent aux points (x_k, y_k) , et la courbe bleue représente le polynôme d'interpolation.

1. Polynôme d'interpolation de Lagrange

1.1 Existence et unicité du polynôme d'interpolation

Si le polynôme d'interpolation est donné par :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \quad (1)$$

$$\text{Or } p \text{ doit vérifier : } p(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (2)$$

afin que ce dernier passe par l'ensemble des points à interpoler. L'équation (1), nous donne le système d'équations linéaires d'inconnus a_k ; d'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & x_0^{n-2} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ou

$$M A = Y \quad M \text{ est la matrice de Vandermonde d'éléments } x_i^j \quad 0 \leq i, j \leq n,$$

A représente les inconnues a_i et Y représente les réels donnés y_i .

Pour construire $p(x)$, il suffit de résoudre ce système afin d'obtenir les valeurs des coefficients a_k . La matrice de ce système est une matrice de Vandermonde. Le déterminant de M est égal à

$$\det(M) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

est donc non nul, puisque les x_i sont distincts 2 à 2, le polynôme d'interpolation existe et est unique. L'unicité résulte aussi du fait que si P et Q sont de degré n et coïncident en $n + 1$ points, alors $P - Q = 0$.

1.2 Construction du polynôme d'interpolation

On se donne $n + 1$ points $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ (avec les x_i distincts 2 à 2). On se propose de construire un polynôme de degré n qui aux abscisses x_i prend les valeurs y_i .

L'étude suivante propose de montrer que le polynôme

$$L(X) = \sum_{j=0}^n y_j \left(\prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{X - x_i}{x_j - x_i} \right)$$

est le seul polynôme de degré au plus n à satisfaire la propriété (2).

Les polynômes de Lagrange associés à ces points sont les polynômes définis par :

$$l_i(X) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j} = \frac{X - x_0}{x_i - x_0} \dots \frac{X - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{X - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{X - x_n}{x_i - x_n}.$$

On a en particulier deux propriétés :

1. l_i est de degré n pour tout i
2. $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq n$; $l_i(x_i) = 1$ et $l_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$

Le polynôme défini par

$$L(X) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(X)$$

est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $L(x_i) = y_i$ pour tout i .

En effet :

- d'une part

$$L(x_i) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(x_i) = y_i$$

- d'autre part, étant combinaison linéaire de polynômes de degré n , L est de degré au plus n ; si un autre polynôme Q vérifie ces propriétés, alors $L - Q$ est de degré au plus n et il s'annule en $n+1$ points distincts (les x_k) : $L - Q$ est donc nul, ce qui prouve l'unicité.

Base de polynômes

On se donne $n + 1$ scalaires distincts $x_0, \dots, x_n$. Pour tout polynôme P appartenant à $K_n[X]$, si on pose $y_i = P(x_i)$, P est le polynôme d'interpolation correspondant aux points. Il est égal au polynôme L défini ci-dessus. On a donc

$$P(X) = \sum_{j=0}^n P(x_j) l_j(X)$$

Donc $(l_0, l_1, \dots, l_n)$ forme une famille génératrice de $K_n[X]$.

Comme son cardinal (égal à $n + 1$) est égal à la dimension de l'espace, elle en est une base.

Autre écriture du polynôme d'interpolation

Soit

$$N(X) = \prod_{j=0}^n (X - x_j) \quad . \quad \text{Alors} \quad N(x_i) = 0 \quad \text{et}$$

$$N'(X) = \sum_{j=0}^n \prod_{i=0, i \neq j}^n (X - x_i) \quad .$$

En particulier, comme tous les produits sont nuls en x_k sauf un :

$$N'(x_k) = \prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i) \quad .$$

Ainsi

$$l_i(X) = \frac{N(X)}{N'(x_i)(X - x_i)}$$

On se donne $n + 1$ scalaires distincts $x_0, \dots, x_n$. Pour tout polynôme P appartenant à $K_n[X]$, si l'on pose $y_i = P(x_i)$, P est le polynôme d'interpolation correspondant aux points $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$; il est égal au polynôme L défini ci-dessus.

On a donc

$$P(X) = \sum_{j=0}^n P(x_j) l_j(X)$$

Exemple 1

En choisissant $P = 1$ ou $P = X$ on a

$$1 = \sum_{j=0}^n l_j(X) \quad \text{et} \quad X = \sum_{j=0}^n x_j l_j(X)$$

Exemple 2

Etant donné les points $(0, 1)$; $(1, 2)$ et $(2, 4)$ déterminer le polynôme d'interpolation qui passe par ces points.

$$\text{On a } l_0 = \frac{x-1}{0-1} \times \frac{x-2}{0-2} \quad ; \quad l_1 = \frac{x-0}{1-0} \times \frac{x-2}{1-2} \quad ; \quad l_2 = \frac{x-0}{2-0} \times \frac{x-1}{2-1}$$

$$l_0 = \frac{1}{2} (x - 1)(x - 2) \quad ; \quad l_1 = (2 - x)x \quad ; \quad l_2 = \frac{1}{2} x(x - 1)$$

$$P_2(x) = 1 \times l_0 + 2 \times l_1 + 4 \times l_2$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (x - 1)(x - 2) + 2(2 - x)x + 4 \times \frac{1}{2} x(x - 1)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

1.3 Erreur d'interpolation

L'erreur d'interpolation lors de l'approximation d'une fonction f , c.-à-d. lorsque $y_i = f(x_i)$, est donnée par une formule de Taylor-Young. Si f est $n+1$ fois continûment différentiable sur

$$I = [\min(x_0, \dots, x_n, x), \max(x_0, \dots, x_n, x)]$$

alors

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \xi \in I.$$

Cette formule se démontre en appliquant de manière itérée le théorème de Rolle sur les sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$.

Dans le cas particulier où $x_i = x_0 + ih$ (points uniformément répartis), se produit en général une aggravation catastrophique de l'erreur d'interpolation, connue sous le nom de phénomène de Runge, lorsqu'on augmente le nombre de points pour un intervalle $[x_0, x_n]$ donné.

1.3 Phénomène de Runge

Le **phénomène de Runge** se manifeste dans le contexte de l'interpolation polynomiale, en particulier l'interpolation de Lagrange. Avec certaines fonctions, l'augmentation du nombre n de points d'interpolation ne constitue pas nécessairement une bonne stratégie d'approximation.

En étudiant cette question, le mathématicien **Runge** découvrit un résultat contraire à l'intuition : il existe des configurations où l'écart maximal entre la fonction et son interpolation augmente indéfiniment avec n .

Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

On considère (n+1) points équirépartis dans le segment $[-1, 1]$,

$$x_0 = -1, \dots, x_k = x_0 + kh, \dots, x_n = 1 \text{ avec } h = \frac{2}{n}$$

Enfin, on considère le polynôme interpolateur de f aux points (x_i) , c'est-à-dire l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout i . On note P_n ce polynôme.

Runge a montré que l'erreur d'interpolation entre P_n et f tend vers l'infini lorsque n augmente. Autrement dit, plus on fixe de points où le polynôme a la même valeur que f , moins bien on approche la fonction. Formellement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| \right) = \infty$$

En fait, lorsqu'on augmente le nombre de points, on constate que le polynôme se met à osciller fortement entre les points x_i avec une amplitude de plus en plus grande.

Cependant, Tchébycheff a trouvé une disposition judicieuse des nœuds x_i . Il a montré, que la disposition suivante des x_i dans un intervalle $[a, b]$

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \mu_i \text{ où } \mu_i = -\cos \cos \left(\frac{2i+1}{2n+2} \pi \right), \quad 0 \leq i \leq n$$

minimise l'erreur d'interpolation.

2. Interpolation newtonienne

L'**interpolation newtonienne**, du nom d'Isaac Newton, est une méthode d' interpolation polynomiale permettant d'obtenir le polynôme de Lagrange comme combinaison linéaire de polynômes de la *base newtonienne*.

Cette méthode ne diffère de l'interpolation lagrangienne définie précédemment que par la façon dont le polynôme est calculé, le polynôme d'interpolation qui en résulte est le même. Pour cette raison on parle aussi plutôt de la *forme de Newton* du polynôme de Lagrange.

2.1 Définition du polynôme d'interpolation sous la forme de Newton

Étant donné un ensemble de $k+1$ points $(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$ (les x_j tous distincts 2 à 2), l'interpolation polynomiale dans une base de Newton est une combinaison linéaire de polynômes appartenant à cette base, on a donc

$$N(x) = \sum_{j=0}^k a_j n_j(x) \quad \text{avec} \quad n_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i)$$

et les coefficients comme ceci

$$a_j = [y_0, \dots, y_j] \quad \text{où} \quad [y_0, \dots, y_j]$$

est la notation pour les **différences divisées**.

Par conséquent, le polynôme d'interpolation peut être écrit ainsi

$$N(x) = [y_0] + [y_0, y_1](x - x_0) + \dots + [y_0, \dots, y_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

2.2 Définition des différences divisées

Étant donné n points

$$(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$$

les **différences divisées** sont définies par la relation de récurrence suivante :

$$[y_i] = y_i \quad \text{pour } i = 0, \dots, n - 1$$

$$[y_{k'}, \dots, y_{k+j}] = \frac{[y_{k+1}, \dots, y_{k+j}] - [y_{k'}, \dots, y_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k} ; \quad 0 \leq k \leq n - 1, \quad 1 \leq j \leq n - 1$$

On utilise souvent la notation suivante :

Si les points sont donnés à l'aide d'une fonction $f(x)$

$$(x_0, f(x_0)), \dots, (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$$

que l'on écrit généralement

$$f[x_i] = f(x_i) \quad \text{pour } i = 0, \dots, n - 1$$

$$f[x_{k'}, \dots, x_{k+j}] = \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+j}] - f[x_{k'}, \dots, x_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k} ; \quad 0 \leq k \leq n - 1, \quad 1 \leq j \leq n - 1$$

Exemple 3

Les premières itérations donnent :

$$\text{Ordre 0 : } [y_0] = y_0$$

$$\text{Ordre 1 : } [y_0, y_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\text{Ordre 2 : } [y_0, y_1, y_2] = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Pour expliciter le processus récursif, les différences divisées peuvent être calculées en les disposant dans un tableau triangulaire de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl}
x_0 & y_0 & = [y_0] \\
& & [y_0, y_1] \\
x_1 & y_1 & = [y_1] \quad [y_0, y_1, y_2] \\
& & [y_1, y_2] \quad [y_0, y_1, y_2, y_3] \\
x_2 & y_2 & = [y_2] \quad [y_1, y_2, y_3] \\
& & [y_2, y_3] \\
x_3 & y_3 & = [y_3]
\end{array}$$

Ainsi le polynôme de l'exemple 2 précédent s'obtient également, en utilisant les différences divisées, de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & [1] & 2 & 4 & \frac{2-1}{1-0} = [1] \quad \frac{4-2}{2-1} = 2 \quad \frac{2-1}{2-0} = \left[\frac{1}{2}\right]
\end{array}$$

D'où le polynôme :

$$P(x) = 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x(x - 1) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

Le polynôme trouvé est le même que celui obtenu par les polynômes de Lagrange à.

2.3 Erreur d'interpolation à l'aide des différences divisées

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(n + 1)$ points x_i , $0 \leq i \leq n$ dans $[a, b]$

et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ alors $\forall x \in [a, b]$, il existe $\xi \in [a, b]$ dépendant de x tel que

$$E(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{j=0}^n (x - x_j) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

3. Interpolation d'Hermite

3.1 Présentation

L'interpolation de Lagrange présentée au paragraphe 1, fournit facilement un polynôme prenant des valeurs données, mais a l'inconvénient de donner une approximation médiocre dans certains cas. La différence entre une fonction et son polynôme d'interpolation peut être grande, même si le nombre de points tend vers l'infini (phénomène dit de *Runge*). Pour remédier à cela on peut essayer d'utiliser non seulement les valeurs d'une fonction mais aussi celles de ses dérivées : c'est l'interpolation d'Hermite à l'ordre 1, qui est mise en œuvre dans ce paragraphe.

3.2. Définition

On considère une fonction f dérivable sur $\mathbf{R}$ et des points $x_1, \dots, x_n$ distincts 2 à 2. On note $y_i = f(x_i)$ et $d_i = f'(x_i)$

et soient $\{H_i(x) = \left(1 - 2 L_i'(x_i)(x - x_i)\right) L_i^2(x) \quad K_i(x) = (x - x_i) L_i^2(x)$

Où $L_i(x)$ est le polynôme de Lagrange $\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Le polynôme d'interpolation de f est défini par

$$P(x) = \sum_{i=1}^n y_i H_i(x) + \sum_{i=1}^n d_i K_i(x)$$

3.3 Autre définition

$$Q_j(x) = \prod_{k=1, k \neq j}^{k=n} (x - x_k)^2 \quad \text{et calculons} \quad Q_j'(x) \quad \text{et} \quad Q_j'(x_j)$$

On définit

$$P(x) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j(x)}{Q_j(x_j)} \left[\left(1 - (x - x_j) \frac{Q_j'(x_j)}{Q_j(x_j)} \right) y_j + (x - x_j) d_j \right]$$

On montre que pour $i = 1, \dots, n$ on a $P(x_i) = y_i$ et $P'(x_i) = d_i$

En effet, utilisant la dérivée logarithmique on a

$$Q'_j(x) = Q_j(x) \sum_{k=1, k \neq j}^{k=n} \frac{2}{x - x_k}$$

D'où

$$Q'_j(x_j) = Q_j(x_j) \sum_{k=1, k \neq j}^{k=n} \frac{2}{x_j - x_k}$$

Ce qui donne pour P :

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j(x_i)}{Q_j(x_j)} \left[\left(1 - (x_i - x_j) \frac{Q'_j(x_j)}{Q_j(x_j)} \right) y_j + (x_i - x_j) d_j \right]$$

Mais dans la sommation les facteurs $Q_j(x_i)$ sont nuls sauf pour $j = i$ d'où :

$$P(x_i) = \frac{Q_i(x_i)}{Q_i(x_i)} \left[\left(1 - (x_i - x_i) \frac{Q'_i(x_i)}{Q_i(x_i)} \right) y_i + (x_i - x_i) d_i \right] = y_i$$

On dérive P :

$$\begin{aligned} P'(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{Q'_j(x)}{Q_j(x_j)} \left[\left(1 - (x - x_j) \frac{Q'_j(x_j)}{Q_j(x_j)} \right) y_j + (x - x_j) d_j \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \frac{Q_j(x)}{Q_j(x_j)} \left[\left(-\frac{Q'_j(x_j)}{Q_j(x_j)} \right) y_j + d_j \right] \end{aligned}$$

$Q'_j(x)$ s'annulant pour tous les $j \neq i$ on déduit

$$P'(x_i) = \frac{Q'_i(x_i)}{Q_i(x_i)} [y_i] + \left[-\frac{Q'_i(x_i)}{Q_i(x_i)} y_i + d_i \right] = d_i$$

Chaque polynôme Q_j est de degré $2n-2$ donc P est de degré au plus $2n-1$.

On a $P'(x) = \sum_{k=1}^m k a_k x^{k-1}$ d'où le système de $2n$ équations aux inconnues a_k :

3.4 Remarque

L'interpolation d'Hermite pour des y_i et d_i donnés est unique. En effet, si R est un autre polynôme satisfaisant les mêmes conditions que P on a $P - R$ s'annule ainsi que sa dérivée

pour tous les x_i . $P - R$ est donc divisible par $\prod_{i=1}^n (x - x_i)^2$, ce qui donne $P - R = 0$ car $P - R$ est de degré $2n-1$.