

УТВЕРЖДАЮ

Начальник управления образования
Могилевского облисполкома

В.В.Рыжков
«___» ноября 2017 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

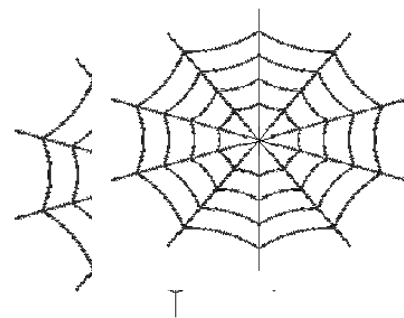
Дата проведения: 2 декабря 2017 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 14.00.

VIII класс

1. Докажите, что если при некоторых целых значениях m и n число $3m + 2n$ делится без остатка на 2017, то число $2011m + 2013n$ также делится без остатка на 2017.

2. На рисунке изображена паутина. Какое наибольшее число «ниточек» этой паутины можно перерезать, чтобы у паука оставалась возможность из любой точки паутины попасть в любую другую ее точку, двигаясь по «ниточкам» паутины? («Ниточкой» будем называть участок паутины между двумя соседними узелками (точками, в которых сходятся несколько паутинок), либо между узелком и точкой, в которой крепится паутина).



3. Найдите координаты точки пересечения диагоналей четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения четырех прямых, заданных формулами:

$$y = \frac{2016}{2017}x + 2017; \quad y = \frac{2016}{2017}x - 2017; \quad y = -\frac{2017}{2018}x + 2017; \quad y = -\frac{2017}{2018}x - 2017$$

4. Имеется 39 монет. Требуется разложить эти монеты по клеткам квадратной доски $n \times n$ так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1 (в клетках может быть по несколько монет или не быть их вообще). При каком максимальном n это возможно?

5. В треугольнике ABC угол C равен 30° . Точка M – середина стороны BC , угол MAC равен 15° . Найти величину угла ABC .

Пользоваться калькулятором не разрешается

Математика
VIII класс. Решения.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. Решение

Доказательство.

$$2011m + 2013n = (2017m - 6m) + (2017n - 4n) = 2017(m + n) - 2(3m + 2n).$$

Последнее выражение представляет собой разность двух чисел, кратных 2017. Что и требовалось доказать.

2. Решение.

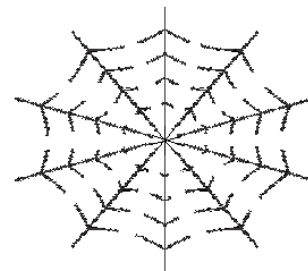
Узелки паутины и точки, в которых крепится исходная паутина будем называть вершинами паутины. Всего вершин будет $1 + 5 \cdot 10 = 51$.

Несложно посчитать общее число ниточек:

$$4 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 90.$$

Рассмотрим произвольную вершину паутины. Чтобы из этой вершины добраться до какой-либо другой вершины надо пробежать не менее, чем по одной ниточке. Тогда чтобы добраться до всех остальных 50 вершин, надо пробежать не менее чем по 50 ниточкам. Таким образом, не менее 50 ниточек должны остаться целыми. Тогда перерезать можно $90 - 50 = 40$ ниточек.

На рисунке приведен соответствующий пример.



Ответ: 40 ниточек.

3. Решение.

Из уравнений следует, что графики данных линейных функций – это две пары параллельных прямых. Значит, точки пересечения графиков являются вершинами параллелограмма. Две противоположные вершины этого параллелограмма – это $M(0; 2017)$ и $N(0; -2017)$. Так как диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, то искомая точка – середина отрезка MN , то есть точка $(0; 0)$.

Ответ: (0; 0).

4. Решение.

Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Из условия задачи следует, что количества монет в клетках одного цвета имеют одинаковую четность, а количества монет в клетках разного цвета имеют различную четность.

Если n четно, т.е. $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то общее число клеток на доске равно $n^2 = 4k^2$. Соответственно клеток черного и белого цвета будет по $2k^2$ – четные количества. Отсюда следует, что общее количество монет на доске будет четно, а оно равно 39 – противоречие. Следовательно, n – нечетно.

Раскрасим при нечетном n клетки доски в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. (В этом случае число черных клеток на доске на единицу превышает число белых).

Пусть в каждой черной клетке находится нечетное число монет, тогда максимально возможное число черных клеток равно 39 и соответственно общее число клеток на доске не превышает $39 + 38 = 77$.

Пусть в каждой белой клетке находится нечетное число монет, тогда максимально возможное число белых клеток равно 39 и соответственно общее число клеток на доске не превышает $39 + 40 = 79$.

В любом случае имеем $n^2 \leq 79$. С учетом того, что n – нечетное имеем $n \leq 7$.

Покажем, что на доске 7×7 можно разместить 39 монет в соответствии с требованием задачи. В каждую черную клетку (их 25) положим по одной монете.

Затем в произвольные 7 белых клеток положим по две монеты. Всего монет на доске будет $25 + 2 \cdot 7 = 39$.

Ответ: 7×7 .

5. Решение.

Проведем высоту BH . Так как $\angle BCH = 30^\circ$, $BH = \frac{1}{2}BC$. Пусть $BH = a$, тогда $BC = 2a$, $BM = MC = a$. Тогда $HM = a$ (медиана прямоугольного треугольника).

Треугольник BHM – равносторонний, $\angle HBM = \angle HMB = 60^\circ$.

Далее, $\angle HMC = 120^\circ$, $\angle MHC = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$.

$\angle AMH = \angle MHC - \angle MAN = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ = \angle MAN$.

Получаем, что треугольник AHM – равнобедренный, $AH = HM = a$.

Так как $AH = BH = a$, то прямоугольный треугольник AHB – равнобедренный, $\angle ABH = 45^\circ$.

$\angle ABC = \angle ABH + \angle HBC = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$.

Ответ: 105° .

