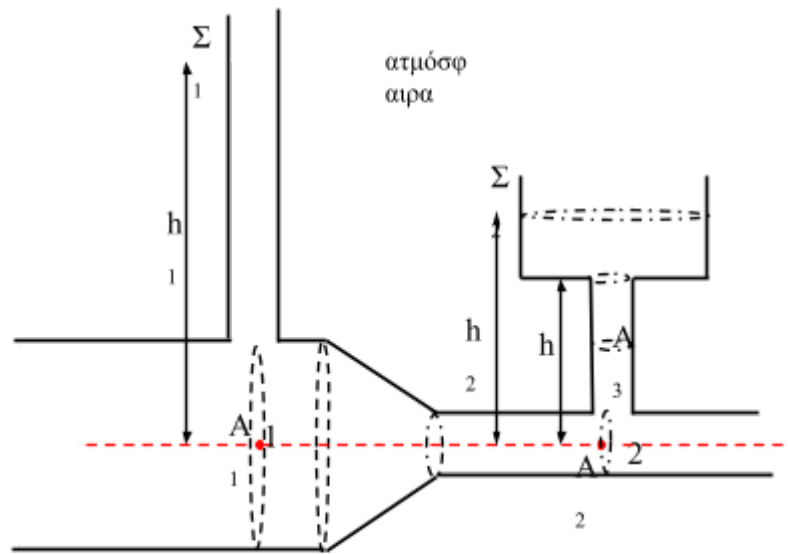


Ένα αλλιώτικο φλοτέρ

Στο ροόμετρο του διπλανού σχήματος ρέει νερό πυκνότητας $\rho_v = 10^3 \text{ kg/m}^3$. Στο σημείο (1), η πυκνότητα της κινητικής ενέργειας του νερού είναι 2000 J/m^3 . Οι δυο οριζόντιοι σωλήνες έχουν διατομές $A_1 = 8 \text{ cm}^2$ και A_2 αντίστοιχα. Στους δύο οριζόντιους σωλήνες έχουν συνδεθεί δύο κατακόρυφοι σωλήνες Σ_1 και Σ_2 που επικοινωνούν στο πάνω μέρος τους με την ατμόσφαιρα και το νερό ανέρχεται σε αυτούς σε ύψη $h_1 = 0,9 \text{ m}$ και $h_2 = 0,3 \text{ m}$ αντίστοιχα. Στον σωλήνα Σ_2 υπάρχει διαπλάτυνση όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ύψος h στο σωλήνα Σ_2 από το κέντρο του οριζόντιου σωλήνα μέχρι το σημείο που ξεκινά η διαπλάτυνση είναι $h = 0,15 \text{ m}$ και το εμβαδό διατομής στο στενό τμήμα είναι $A_3 = 2 \text{ cm}^2$.



Οι διαστάσεις του σχήματος δεν είναι ενδεικτικές

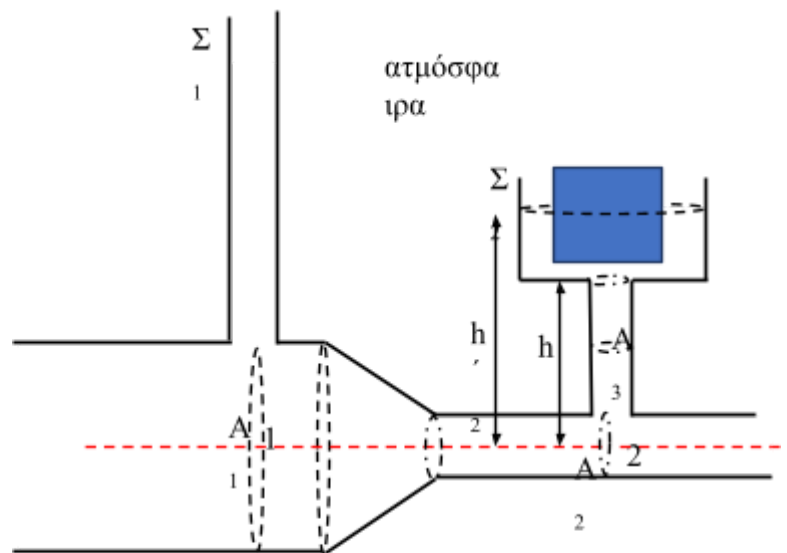
i) Να βρεθεί η διατομή A_2 του λεπτού οριζόντιου σωλήνα.

Στον κατακόρυφο σωλήνα Σ_2 τοποθετούμε ένα κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με ύψος $H = 12 \text{ cm}$, πλευρά βάσης $a = 2 \text{ cm}$ και μετά από λίγο αποκαθίσταται μόνιμη και στρωτή ροή.

ii) Αν το κιβώτιο βυθίζεται κατά τα τρία τέταρτα του όγκου του να βρείτε την πυκνότητά του.

iii) Αν δεν μεταβάλλεται η παροχή και η πίεση στον κεντρικό σωλήνα, να εξετάσετε αν το τελικό ύψος που ανέρχεται το νερό στον σωλήνα μεταβληθεί και αν ναι, να υπολογίσετε την αλλαγή του ύψους.

iv) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του νερού στο σημείο 2 ώστε το κιβώτιο να μπορεί να επιπλέει αν η πίεση στο σημείο 1 δεν μεταβάλλεται.



Οι διαστάσεις του σχήματος δεν είναι ενδεικτικές

ν) Αν η ταχύτητα του νερού στον οριζόντιο σωλήνα στο σημείο 1 είναι $v_1 = \sqrt{6} \text{ m/s}$ και η πίεση ίδια με την αρχική να βρεθεί η δύναμη που δέχεται το κιβώτιο από τα κάτω τοιχώματα του διαπλατυσμένου τμήματος του σωλήνα Σ_2 , αν θεωρηθεί ότι δεν μπορεί να εισέλθει αέρας στον σωλήνα από τη στιγμή που ακουμπά το κιβώτιο στα τοιχώματα και λειτουργεί σαν βεντούζα.

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$ και το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

i) Το νερό κατακόρυφα στους σωλήνες ισορροπεί.

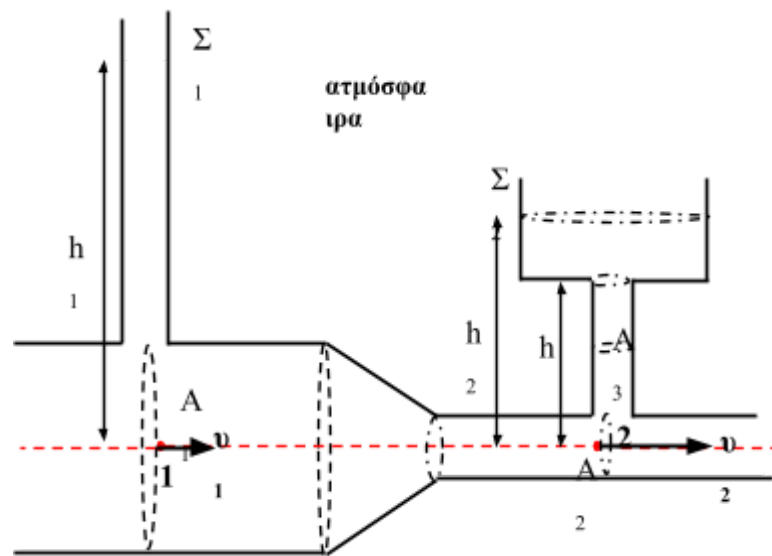
$$p_1 = p_{\text{atm}} + \rho g h_1 \rightarrow p_1 = 10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 0,9$$

$$\rightarrow p_1 = 1,09 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$p_2 = p_{\text{atm}} + \rho g h_2 \rightarrow p_2 = 10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 0,3$$

$$\rightarrow p_2 = 1,03 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

με h_1 το ύψος του νερού στον σωλήνα Σ_1 και h_2 το αντίστοιχο ύψος στο σωλήνα Σ_2 .



Από την πυκνότητα της κινητικής ενέργειας στο σημείο (1) παίρνουμε

$$\frac{dK}{dV} = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \Rightarrow v_1 = 2 \text{ m/s}$$

Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 2 κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής που περνά από τα σημεία αυτά.

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow 1,09 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} 10^3 \cdot 2^2 = 1,03 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} 10^3 v_2^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} 10^3 v_2^2 = 0,06 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^3 \Rightarrow \frac{1}{2} v_2^2 = 6 + 2 \Rightarrow v_2^2 = 16 \Rightarrow v_2 = 4 \text{ m/s}$$

Από την εξίσωση της συνέχειας στα σημεία 1 και 2 έχουμε :

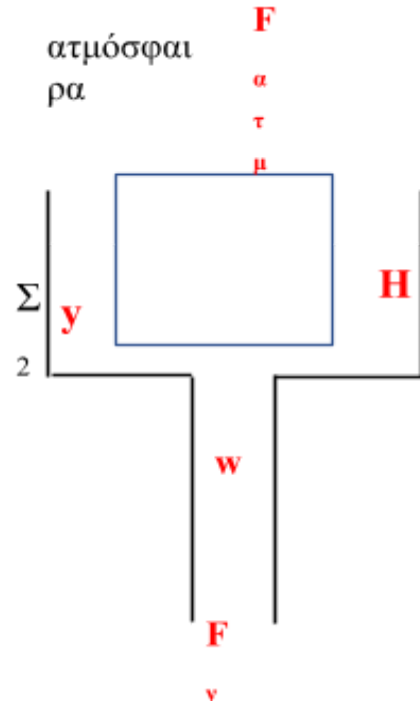
$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \rightarrow A_2 = \frac{v_1}{v_2} \cdot A_1 = \frac{2m/s}{4m/s} 8cm^2 = 4cm^2$$

ii)

Από την ισορροπία του κιβωτίου κατακόρυφα προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} F_{atm} + w_{\pi} &= F_v \rightarrow \\ P_{atm} \alpha^2 + \rho_{\kappa} \cdot g \cdot H \cdot \alpha^2 &= (\rho_v \cdot g \cdot y + P_{atm}) \alpha^2 \rightarrow \\ \rho_{\kappa} \cdot g \cdot H \cdot \alpha^2 &= \rho_v \cdot g \cdot y \cdot \alpha^2 \rightarrow \\ \rho_{\kappa} &= \rho_v \cdot y / H \rightarrow \\ \rho_{\kappa} &= 3\rho_v / 4 \rightarrow \\ \rho_{\kappa} &= 750 kg/m^3 \end{aligned}$$



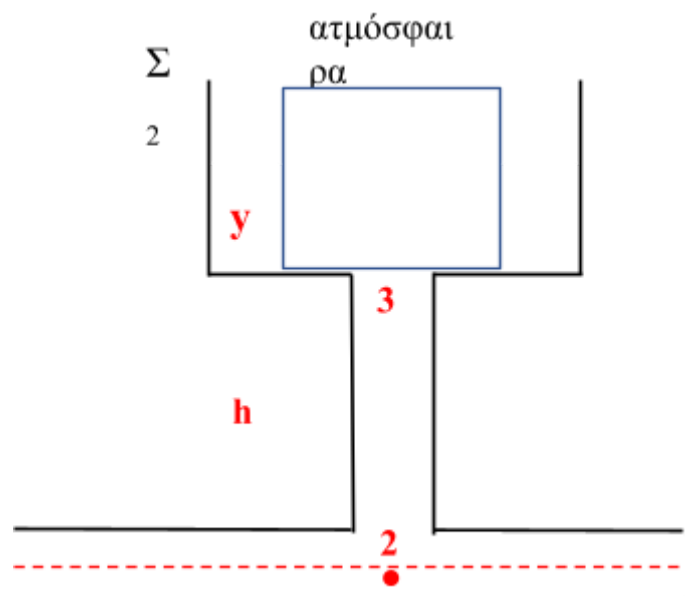
iii) Με την εισαγωγή του κιβωτίου διαταράσσεται αρχικά η ροή και μετά από λίγο αποκαθίσταται ξανά στρωτή και μόνιμη ροή. Επειδή η παροχή μένει ίδια με εφαρμογή της εξίσωσης συνέχειας προκύπτει ότι δεν μεταβάλλεται η ταχύτητα της ροής στο σημείο 2 του οριζόντιου σωλήνα. Κατόπιν με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli προκύπτει ότι δεν μεταβάλλεται η πίεση στον στενό οριζόντιο σωλήνα. Έτσι μετά την αποκατάσταση της ροής το ύψος του νερού h_2' θα είναι ίδιο με το αρχικό δηλαδή $h_2' = 0,3m$.

iv) Καθώς η ταχύτητα ροής στον σωλήνα αυξάνεται η πίεση ελαττώνεται. Η οριακή περίπτωση για να επιπλέει το κιβώτιο είναι το νερό στο διαπλατυσμένο τμήμα να έχει ανέλθει συνολικά όσο το βύθισμα δηλαδή σε ύψος $y = 9cm$ και το κιβώτιο μόλις που δεν ακουμπά στα κάτω τοιχώματα του διαπλατυσμένου σωλήνα.

Το νερό κατακόρυφα στον σωλήνα ισορροπεί.

$$p_2 = \rho_v g(y + h) + p_{atm} \Rightarrow$$

$$p_2 = 10^3 \cdot 10(0,09 + 0,15) + 10^5 \Rightarrow$$



$$p_2 = 0,24 \cdot 10^4 + 10^5 \Rightarrow p_2 = 1,024 \cdot 10^5 \text{ pa}$$

Από την εξίσωση της συνέχειας στα σημεία 1 και 2 έχουμε :

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \rightarrow 2A_2 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \rightarrow v_2 = 2 \cdot v_1$$

Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων 1 και 2 κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής που περνά από τα σημεία αυτά.

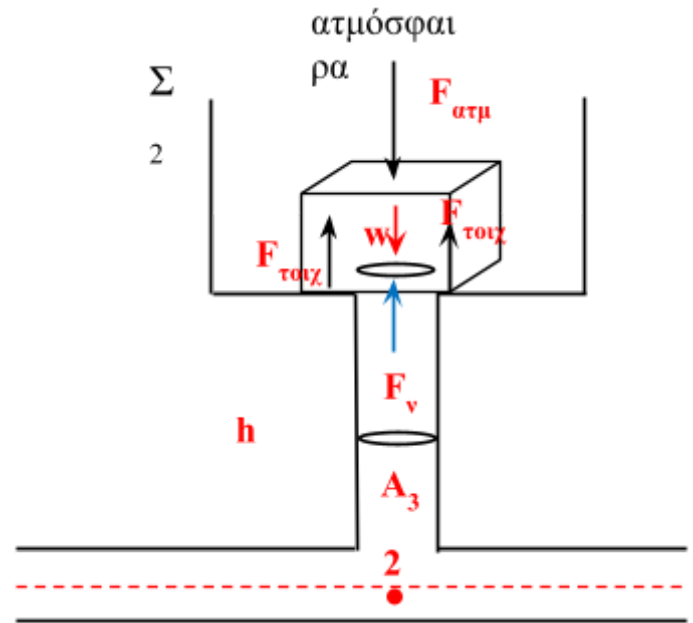
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow 1,09 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} 10^3 v_1^2 = 1,024 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} 10^3 \cdot 4v_1^2 \Rightarrow$$

$$0,066 \cdot 10^5 = \frac{3}{2} 10^3 v_1^2 \Rightarrow 0,132 \cdot 10^5 = 3 \cdot 10^3 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{4,4} \text{ m/s}$$

Άρα η ταχύτητα ροής στο σωλήνα 2 είναι $v_2 = 2\sqrt{4,4} \text{ m/s}$

ν)

Από τη στιγμή που η ταχύτητα στο στενό οριζόντιο σωλήνα υπερβεί την τιμή $v_2 = 2\sqrt{4,4} \text{ m/s}$ η πίεση στο σημείο 2 ελαττώνεται και αν δεν υπήρχε το σώμα το νερό κατακόρυφα θα ελαττωνόταν πιο κάτω από το ύψος των 24cm. Όμως τώρα, τείνοντας το νερό να κατέβει θα ακουμπήσει το κιβώτιο στα κάτω τοιχώματα του διαπλατυσμένου σωλήνα και η κάτω πλευρά του κιβωτίου θα βρίσκεται σε επαφή με το νερό του λεπτού σωλήνα σε επιφάνεια επαφής A_3 . Το κιβώτιο θα εμποδίσει την εισροή αέρα λειτουργώντας σαν καπάκι και ο σωλήνας θα είναι γεμάτος με νερό. Στο διαπλατυσμένο τμήμα εάν έχει απομείνει νερό ασκεί δυνάμεις στα πλαϊνά τοιχώματα του σώματος όπου λόγω



συμμετρίας οι δυνάμεις αυτές αλληλοεξουδετερώνονται.

Από την εξίσωση της συνέχειας στα σημεία 1 και 2 έχουμε :

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \rightarrow 2A_2 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \rightarrow v_2 = 2 \cdot \sqrt{6} \text{ m/s}$$

Από την εξίσωση Bernoulli στα σημεία 1→2.

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \rightarrow$$

$$P_2 = P_1 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 \rightarrow$$

$$P_2 = 1,09 \cdot 10^5 - \frac{1}{2} 10^3 \cdot (2\sqrt{6})^2 + \frac{1}{2} 10^3 \cdot \sqrt{6}^2 \rightarrow$$

$$P_2 = 1,09 \cdot 10^5 - 9 \cdot 10^3 \rightarrow P_2 = 10^5 \text{ Pa}$$

Το νερό κατακόρυφα στον σωλήνα ισορροπεί, οπότε:

$$p_2 = \rho gh + p_3 \rightarrow p_3 = p_2 - \rho gh \rightarrow p_3 = 10^5 - 0,15 \cdot 10^4 \rightarrow p_3 = 0,985 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Το βάρος του κιβωτίου ισούται με:

$$w_k = m_k \cdot g = \rho_k \cdot H \cdot a^2 \cdot g \rightarrow w_k = 750 \cdot 0,12 \cdot 0,02^2 \cdot 10 = 0,36 \text{ N}$$

Από την ισορροπία του κιβωτίου κατακόρυφα προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{\text{atm}} + w_k - F_v - F_{\text{τοιχ.}} = 0 \rightarrow$$

$$P_{\text{atm}} \cdot a^2 + w_k - p_v \cdot A_3 = F_{\text{τοιχ.}} \rightarrow$$

$$F_{\text{τοιχ.}} = 10^5 \cdot 0,02^2 + 0,36 - 0,985 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \rightarrow$$

$$F_{\text{τοιχ.}} = 40 + 0,36 - 19,7 \rightarrow$$

$$\mathbf{F_{\text{τοιχ.}} = 20,66 \text{ N}}$$