



UNIVERSIDAD
DE MURCIA



Universidad
Politécnica
de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

307 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES PAU2025 - BORRADOR

NOTA IMPORTANTE: se debe responder a un máximo de 4 cuestiones, una de cada apartado, y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de entre 2 y 3 puntos. Si se responden las dos cuestiones de un apartado, solo se corregirá la primera que aparezca en el cuadernillo de respuestas. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

APARTADO 1. (a elegir una cuestión)

Cuestión 1. (2,5 puntos)

(1,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5a \\ ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \end{cases}$$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & a & 0 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & a & 0 & 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = a^2 - 2a + 3a = a^2 + a = a(a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = -1$$

– Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$, $\det A \neq 0$, $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si $a = 0$, $\det A = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Como $|1 \ 1 \ 0 \ 2| = 2 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Como $|1 \ 1 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$.

Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si $a = -1$,

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 + 3f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La 2ª fila corresponde a la ecuación $0 = 2$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

(1 punto) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que verifica $AX - A = BX + B$.

Resolución

Trasponiendo términos, $AX - BX = A + B$; sacando factor común X , $(A - B)X = A + B$

Llamando $C = A - B = (1 \ 0 \ -1 \ 2) - (2 \ 1 \ 1 \ 2) = (-1 \ -1 \ -2 \ 0)$, queda $CX = A + B$; $\det C = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$.

Multiplicando por C^{-1} , por la izquierda, $C^{-1}CX = IX = X = C^{-1}(A + B)$

$$X = \frac{1}{\det C} (\text{adj } C)^t (A + B) = \frac{1}{-2} (0 \ 2 \ 1 \ -1)^t [(1 \ 0 \ -1 \ 2) + (2 \ 1 \ 1 \ 2)] = \frac{-1}{2} (0 \ 1 \ 2 \ -1) (3 \ 1 \ 0 \ 4)$$

$$X = \frac{-1}{2} (0 \ 4 \ 6 \ -2) \Rightarrow X = (0 \ -2 \ -3 \ 1)$$

Cuestión 2. (2,5 puntos) Una empresa quiere hacer publicidad a través de anuncios en radio y en televisión. Los anuncios pueden emitirse en tres franjas horarias: franja A, franja B y franja C. El número de anuncios de cada franja que emite cada semana cada uno de los medios aparece en la tabla siguiente:

	Franja A	Franja B	Franja C
Televisión	2	10	6
Radio	5	5	6

Se quiere emitir un mínimo de 20 anuncios en la franja A, 50 en la franja B y 42 en la franja C, para lo que realiza contratos semanales con cada uno de los medios de comunicación. El coste del contrato semanal es de 3200 euros para la televisión y 2000 para la radio. ¿Cuántas semanas deberá contratar con cada uno de los medios para alcanzar su proyecto publicitario con un mínimo coste? (2 puntos) ¿cuál es el coste mínimo? (0,5 puntos).

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

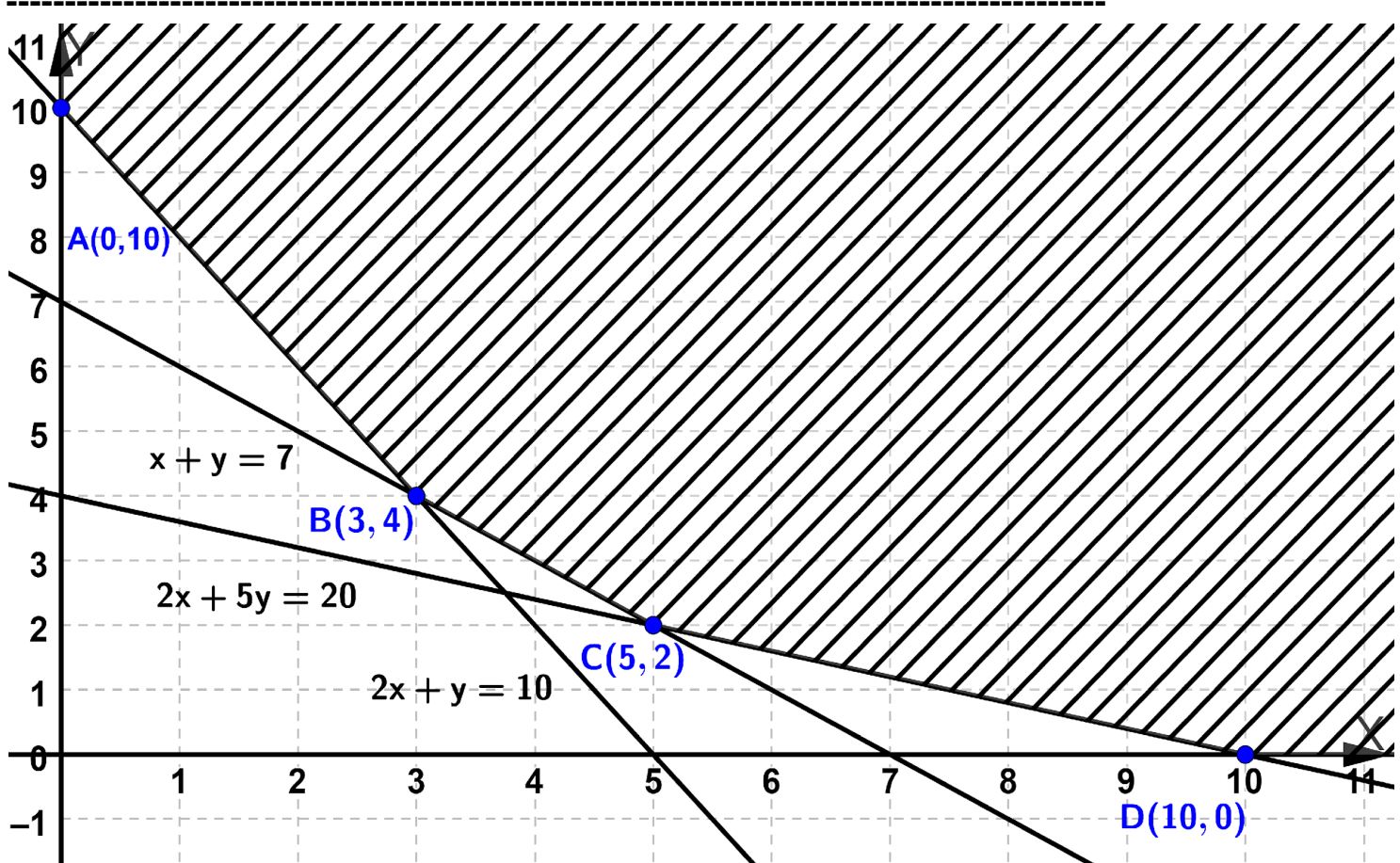
	nº de semanas	anuncios en la franja A	anuncios en la franja B	anuncios en la franja C	coste (en €)
televisión	x	2x	10x	6x	3200x
radio	y	5y	5y	6y	2000y
total	x + y	2x + 5y	10x + 5y	6x + 6y	3200x + 2000y

Función a optimizar (minimizar), coste $f(x, y) = 3200x + 2000y$.

Las restricciones son

$$\{2x + 5y \geq 20 \quad 10x + 5y \geq 50 \quad 6x + 6y \geq 42 \quad x, y \geq 0 \Rightarrow \{2x + 5y \geq 20 \quad 2x + y \geq 10 \quad x + y \geq 7 \quad x, y \geq 0$$

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Valoramos la función coste $f(x, y) = 3200x + 2000y$ en cada vértice y, como la región no es acotada también la valoramos en un punto "lejano", por ejemplo en $E(100, 100)$

$$f(A) = f(0, 10) = 3200 \cdot 0 + 2000 \cdot 10 = 20000 \quad f(B) = f(3, 4) = 3200 \cdot 3 + 2000 \cdot 4 = 17600$$

$$f(C) = f(5, 2) = 3200 \cdot 5 + 2000 \cdot 2 = 20000 \quad f(D) = f(10, 0) = 3200 \cdot 10 + 2000 \cdot 0 = 32000$$

$$f(E) = f(100, 100) = 3200 \cdot 100 + 2000 \cdot 100 = 520000$$

El coste mínimo es 17600 € y se obtiene contratando 3 semanas de anuncios en televisión y 4 semanas de anuncios en radio.

APARTADO 2. (a elegir una cuestión)

Cuestión 1. (3 puntos) Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función: $B(t) = \begin{cases} at - t^2, & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 2t, & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua. (0,75 puntos).

Resolución

Para $t \neq 6$, $B(t)$ es continua en su dominio, que es $[0, 10]$, independientemente del valor de a por serlo las funciones polinómicas.

Como debe ser continua en $t = 6$, entonces

$$B(t) = B(t) \Rightarrow a \cdot 6 - 6^2 = 2 \cdot 6 \Rightarrow 6a - 36 = 12 \Rightarrow a = 8 \text{ . Conclusión: debe ser } a = 8$$

b) Para $a = 8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece.

(1,5 puntos)

c) Para $a = 8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor. (0,75 puntos).

Resolución

Para $a = 8$, $B(t) = \begin{cases} 8t - t^2, & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ 2t, & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$; si $t \neq 6$,
 $B'(t) = \begin{cases} 8 - 2t, & \text{si } 0 \leq t < 6 \\ 2, & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$

Observamos que $B'(t) = 8 - 2 \cdot 6 = -4 \neq B'(t) = 2$, o sea $B(t)$ no es derivable en $t = 6$.

$0 \leq t < 6$, $B'(t) = 8 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 4$. Hagamos una tabla de signos de $B'(t)$

	$(0, 4)$	4	$(4, 6)$	6	$(6, 10)$
$B'(t)$	$+$	0	$-$	\nexists	$+$
$B(t)$	creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente

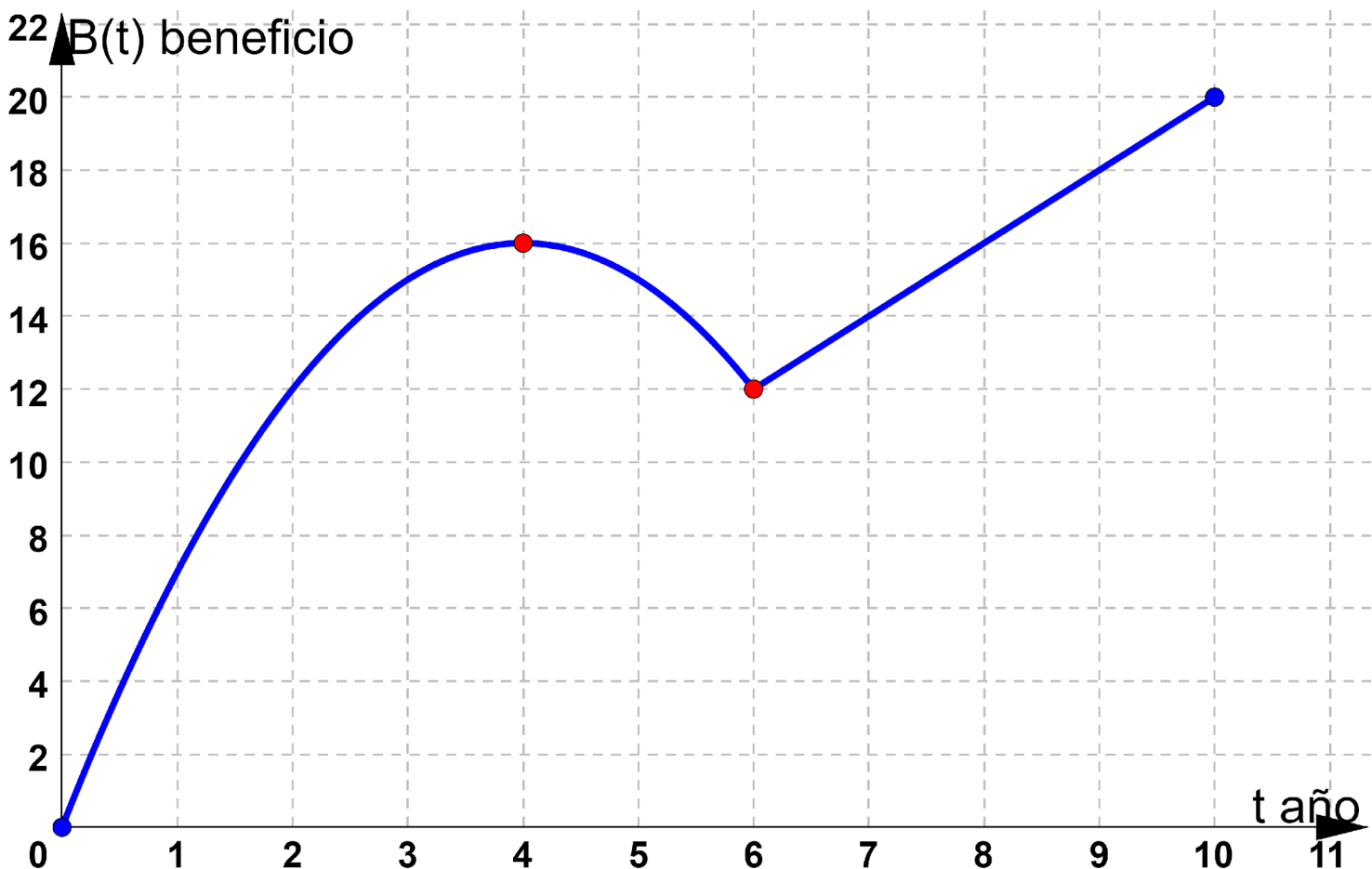
$B(t)$ es creciente en $(0, 4) \cup (6, 10)$ y decreciente en $(4, 6)$

Máximo relativo: $t = 4$, $B(4) = 8 \cdot 4 - 4^2 = 16$, punto $(4, 16)$.

Mínimo relativo: $t = 6$, $B(6) = 8 \cdot 6 - 6^2 = 12$, punto $(6, 12)$.

Además, $B(0) = 8 \cdot 0 - 0^2 = 0$ y $B(10) = 2 \cdot 10 = 20$.

Teniendo en cuenta todo lo calculado y que la gráfica consta de un trozo de parábola y un segmento, la gráfica sería



En los 6 primeros años el máximo beneficio se obtiene el 4º año, siendo este beneficio máximo de 16
 Cuestión 2. (3 puntos) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{-x}{\sqrt[4]{3x-1}}$. (1 punto)

Resolución

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot \sqrt[4]{3x-1} - (-x) \frac{1}{4} (3x-1)^{-\frac{3}{4}}}{(\sqrt[4]{3x-1})^2} = \frac{-\sqrt[4]{3x-1} + \frac{3x}{4\sqrt[4]{(3x-1)^3}}}{(\sqrt[4]{3x-1})^2} = \frac{3x - 4\sqrt[4]{(3x-1)^4}}{4\sqrt[4]{(3x-1)^3} \sqrt[4]{(3x-1)^2}} = \frac{4-9x}{4(3x-1)\sqrt[4]{3x-1}}$$

b) $g(x) = e^{2x-1} \ln(x+2)$ (1 punto)

Resolución $g'(x) = 2e^{2x-1} \ln(x+2) + e^{2x-1} \frac{1}{x+2} = \frac{e^{2x-1} [1 + 2(x+2) \ln(x+2)]}{x+2}$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{1+x}}$ (1 punto)

Resolución $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{1+x}}} \cdot \frac{1(1+x) - (x-1)1}{(1+x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{1+x}}} \cdot \frac{2}{(1+x)^2} = \frac{\sqrt{1+x}}{(1+x)^2 \sqrt{x-1}}$

APARTADO 3. (a elegir una cuestión)

Cuestión 1. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 6$. Calcular su área.

Resolución

Puntos de corte de las parábolas: $\{y = x^2 - 2x + 2, y = -x^2 + 6\}$. Igualando, $x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 6$

$2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0; x = \frac{1 \pm 3}{2}, x = -1, y = -(-1)^2 + 6 = 5$

$x = 2, y = -2^2 + 6 = 2$; puntos de corte $(-1, 5)$ y $(2, 2)$

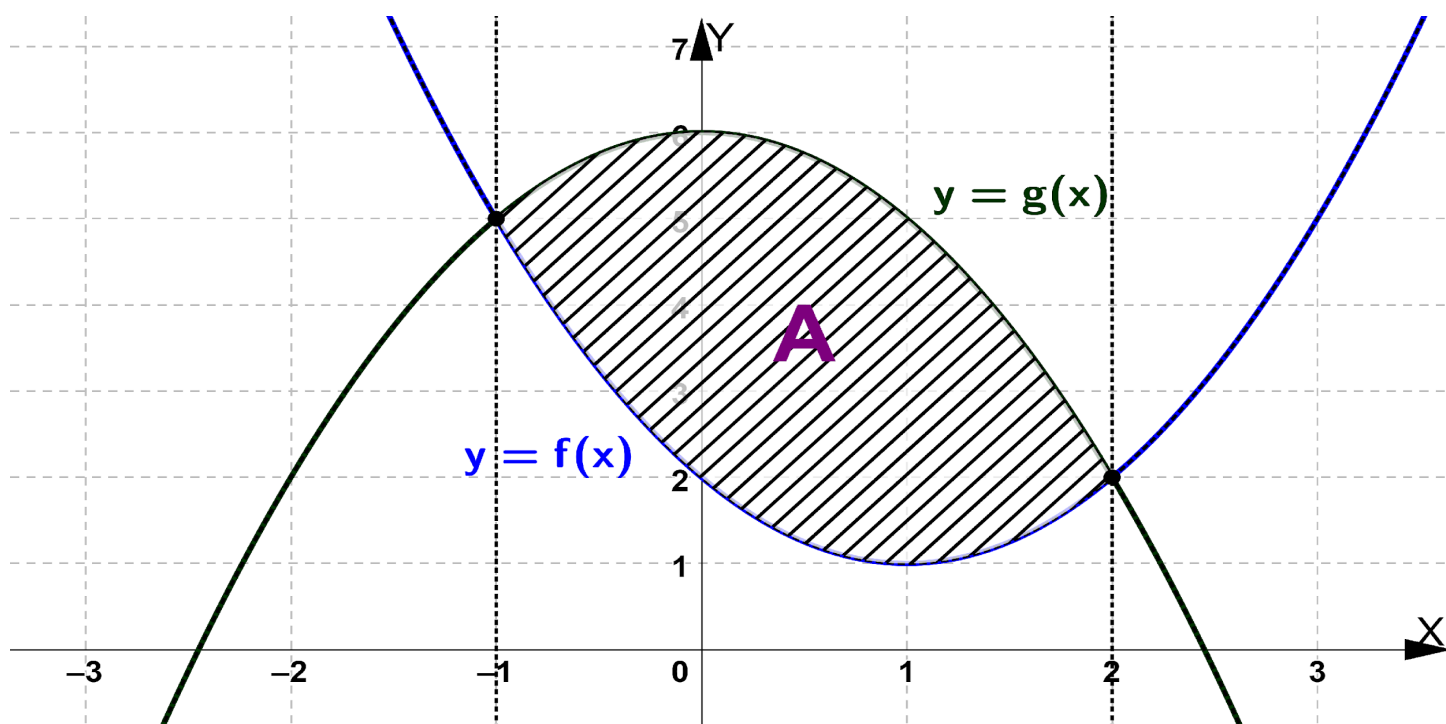
Como $f'(x) = 2x - 2 = 0$ si $x = 1, y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$, y, además, $x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$,

$f(0) = 2$, la gráfica de f es una parábola convexa de vértice $(1, 1)$ y sólo corta al eje Y en $(0, 2)$

Como $g'(x) = -2x = 0$ si $x = 0, y = -0^2 + 6 = 6$, y, además, $-x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

la gráfica de g es una parábola cóncava de vértice $(0, 6)$ y que corta al eje X en $(\sqrt{6}, 0)$ y $(-\sqrt{6}, 0)$

El recinto cuya área se pide es



El área que nos piden es $A = \int_{-1}^2 [-x^2 + 6 - (x^2 - 2x + 2)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$.

Una primitiva es $p(x) = \frac{-2x^3}{3} + x^2 + 4x = \frac{3x^2 + 12x - 2x^3}{3}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(2) - p(-1) = \frac{3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 2 \cdot 2^3}{3} - \frac{3(-1)^2 + 12(-1) - 2(-1)^3}{3} = \frac{27}{3} = 9 \text{ u}^2$

Cuestión 2. (2 puntos) Se considera la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 2x + 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f, la recta $x = -2$ y el eje OX.

Resolución

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{si } x \leq 0 \\ (x - 1)^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases};$$

$\{x \leq 0, -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (imposible)}\}$ $\{x \geq 0, (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0\}$; la gráfica corta a OX en (1, 0)

$f(-2) = -2(-2) + 1 = 5$, $f(0) = 1$ y para $x < 0$, f es decreciente; $f(1) = 0$, para $0 < x < 1$ f es decreciente, entonces resulta que en $[-2, 1]$ la gráfica de f está por encima del eje OX y, por tanto, el área que nos

piden es $A = \int_{-2}^0 (-2x + 1) dx + \int_0^1 (x - 1)^2 dx$

Una primitiva de $(-2x + 1)$ es $p(x) = -x^2 + x$ y de $(x - 1)^2$ es $q(x) = \frac{(x-1)^3}{3}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(0) - p(-2) + q(1) - q(0) = -0^2 + 0 - [-(-2)^2 + (-2)] + \frac{(1-1)^3}{3} - \frac{(0-1)^3}{3} = \frac{19}{3} \cong 6,33 \text{ u}^2$$

APARTADO 4. (a elegir una cuestión)

Cuestión 1. (2,5 puntos) En un partido de fútbol cuatro jugadores, A, B, C y D, lanzan en este orden un penalti cada uno. Se sabe, por otras ocasiones, que la probabilidad de marcar de cada uno de ellos es de $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{4}$, respectivamente. Calcular:

- a) La probabilidad de que todos marquen gol. (0,75 puntos)
- b) La probabilidad de que ninguno marque. (0,75 puntos)
- c) La probabilidad de que al menos uno de ellos marque. (1 punto)

Resolución

Sean los sucesos A, B, C, D que marque gol el jugador A, B, C, D, respectivamente.

$$\text{Observa que } p(A) = \frac{3}{5} \quad p(B) = \frac{5}{6} \quad p(C) = \frac{3}{5} \quad p(D) = \frac{3}{4};$$

$$p(A^c) = \frac{2}{5} \quad p(B^c) = \frac{1}{6} \quad p(C^c) = \frac{2}{5} \quad p(D^c) = \frac{1}{4}$$

y A, B, C, y D son sucesos independientes y también lo son A^c , B^c , C^c y D^c .

a) Se pide $p(A \cap B \cap C \cap D) = p(A)p(B)p(C)p(D) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{40} = 0,225 = 22,5\%$

b) Se pide $p(A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c) = p(A^c)p(B^c)p(C^c)p(D^c) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{150} \cong 0,0067 = 0,67\%$

c) Se pide $1 - p(A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c) = 1 - \frac{1}{150} = \frac{149}{150} \cong 0,9933 = 99,33\%$

Cuestión 2. (2,5 puntos)

El saldo en la cuenta bancaria de los estudiantes de segundo de bachillerato de un instituto de Murcia se distribuye según la distribución normal $N(100, 15)$. Calcule:

- a) La probabilidad de que un estudiante tenga menos de 80 euros. (0,75 puntos)
- b) La probabilidad de que un estudiante tenga entre 90 y 110 euros. (1 punto)

Resolución

$$X = \text{saldo, en euros} \rightarrow N(100, 15) \Rightarrow Z = \frac{X-100}{15} \rightarrow N(0, 1).$$

a) Se pide $p(X < 80) = p\left(\frac{X-100}{15} < \frac{80-100}{15}\right) = p(Z < -1,33) = p(Z > 1,33) = 1 - p(Z \leq 1,33) =$

$$= 1 - 0,9082 = 0,0918 = 9,18\%$$

b) Piden $p(90 < X < 110) = p\left(\frac{90-100}{15} < \frac{X-100}{15} < \frac{110-100}{15}\right) = p(-0,67 < Z < 0,67) =$

$$= p(Z < 0,67) - [1 - p(Z < 0,67)] = 2p(Z < 0,67) - 1 = 2 \cdot 0,7486 - 1 = 0,4972 = 49,72\%$$

c) Si la media fuese desconocida y tuviésemos una muestra de tamaño 36, ¿cuál sería el error máximo admisible para un intervalo de confianza del 95% para el saldo medio en la cuenta bancaria de estos estudiantes? (0,75 puntos)

Resolución

$X = \text{saldo, en euros} \rightarrow N(\mu, 15)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 95% para el saldo medio, μ , es $I_c = (\bar{x} - E, \bar{x} + E)$, siendo \bar{x} la media de la muestra de tamaño $n = 36$

Nos piden el error máximo admisible al 95%, $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la $N(0, 1)$ que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,95}{2} = 0,975$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,975$ usando la tabla de la $N(0, 1) \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.

Sustituyendo, $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{15}{\sqrt{36}} = 4,9 \text{ €}$