Tabla de derivadas

Función constante: $\boxed{(c)' = 0}$. *Ejemplo*: $(6)' = 0$ **Función potencia:** $\boxed{\left(x^k\right)' = kx^{k-1}}$ siendo $k \in R$ *Ejemplo*: $\left(x^3\right)' = 3x^2$ *Casos particulares* $(x)' = 1$ $\left(x^2\right)' = 2x$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	**Función exponencial**: $\boxed{\left(a^x\right)' = a^x.\ln a}$ con $a > 0, a \neq 1$ *Ejemplo*: $\left(2^x\right)' = 2^x.\ln 2$ *Caso particular*: $\left(e^x\right)' = e^x$ **Función logaritmo**: $\boxed{\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}}$ con $a > 0, a \neq 1$ *Ejemplo*: $\left(\log_3 x\right)' = \frac{1}{x \ln 3}$ *Caso particular*: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
Función seno: $\boxed{(\operatorname{sen} x)' = \cos x}$	**Función arco seno**: $\boxed{(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$
Función coseno: $\boxed{(\cos x)' = -\operatorname{sen} x}$	**Función arco coseno**: $\boxed{(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$
Función tangente: $\boxed{(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$	**Función arco tangente**: $\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$

Reglas de derivación

Si u y v son dos funciones derivables, se cumplen las siguientes reglas:

Derivada de la suma/resta de funciones	Derivada de un número por una función
$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$ *Ejemplos*: $(x^3 + 3^x)' = (x^3)' + (3^x)' = 3x^2 + 3^x.\ln 3$ $\left(\ln x - \sqrt{x}\right)' = (\ln x)' - (\sqrt{x})' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$	**$[k.u(x)]' = k.u'(x)$** *Ejemplo*: $(7x^4)' = 7.(x^4)' = 7.4x^3 = 28x^3$

Derivada de la combinación lineal de funciones
$[k.u(x) \pm l.v(x)]' = k.u'(x) \pm l.v'(x)$ *Ejemplo*: $(2x^5 - 3x^2 + 2x - 7)' = 2(x^5)' - 3(x^2)' + 2(x)' - (7)' = 10x^4 - 6x + 2 - 0 = = 10x^4 - 6x + 2$

Derivada del producto de dos funciones	Derivada del cociente de dos funciones
$[u(x) . v(x)]' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$ *Ejemplo*:	$\boxed{\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}}$

$\left(x^2 \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \ln x + x^2 (\ln x)' =$ $= 2x\ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$	*Ejemplo*: $\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{\left(e^x\right)' x - e^x (x)'}{x^2} =$ $= \frac{e^x x - e^x .1}{x^2} = \frac{e^x (x-1)}{x^2}$

Demostración de algunas reglas de derivación

- Derivada de una constante por una función, f(x) = k · u(x)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ku(x+h)-ku(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k[u(x+h)-u(x)]}{h} = k \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = ku'(x)$$

- Derivada de una suma de funciones, f(x) = u(x) + v(x)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)+v(x+h)-[u(x)+v(x)]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)+v(x+h)-v(x)}{h} == \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} +$$

- Derivada de una diferencia de funciones, f(x) = u(x) – v(x)

$$f(x) = u(x) + (-1)v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + (-1)v'(x) = u'(x) - v'(x)$$

- Derivada de un producto de funciones, f(x) = u(x) . v(x)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} Restamos y sumamos u(x)v(x+h) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h)-u}{}$$

Vamos a comprobar mediante la derivación logarítmica esta igualdad

$$(f.g)' = f\,g' + f'\,g$$

Si llamamos $\phi(x) = f(x).g(x)$ Tomamos logaritmos en esa expresión $\ln\phi(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$

Derivamos y obtenemos $\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$

Despejamos $\phi'(x)$ y operamos obteniendo: $\phi'(x) = f(x).g(x)\left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right] = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

- Derivada de un cociente de funciones: Considérense, como en los casos precedentes, dos funciones f y g definidas y derivables en un punto x. Además, en este caso, se tiene que imponer la condición de que la función g no se anule en x.

$$\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{g(x)\cdot g(x+h)\cdot h} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)} \cdot \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h} = (1)$$

Si en la segunda fracción se suma y se resta al numerador f(x) · g(x), se obtiene:

$$(1) = \frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)} \cdot \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h} = (2)$$

Sacando factor común g(x) en los dos primeros sumandos de la segunda fracción, y f(x) en los dos últimos,

$$(2) = \frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)} \cdot \frac{g(x)\left[f(x+h) - f(x)\right] - f(x)\left[g(x+h) - g(x)\right]}{h}$$

Por último, se toman límites cuando h tiende a cero notando que:

$\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ por la continuidad de g en x al ser g derivable en dicho punto.

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ y $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$ por definición de derivada.

En definitiva,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\right)\cdot g(x)\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] -$$

$$-f(x)\left[\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] =$$

$$= \frac{1}{\left[g(x)\right]^2}\left[g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)\right]$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

<u>Demostración de las derivadas más corrientes</u>

- <u>Función constante</u>, f(x) = c: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$

- <u>Función potencia</u>, $f(x) = x^m, m > 0$:

$\dfrac{(x+h)^m - x^m}{h}$. Desarrollando por el binomio de Newton $(x+h)^m$,

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \frac{\binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1}\cdot h + \binom{m}{2} x^{m-2}\, h^2 + \ldots + \binom{m}{m} h^m - x^m}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{x^m} + \binom{m}{1} x^{m-1} h + \ldots + \binom{m}{m} h^m - \cancel{x^m}}{h} = \binom{m}{1} x^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2} h + \ldots + \binom{m}{m} h^{m-1}$$

Tomando límites cuando h → 0,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\binom{m}{1} x^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2} h + \ldots + \binom{m}{m} h^{m-1} \right]$$

Salvo el término $\binom{m}{1} x^{m-1} = m\,x^{m-1}$, que no depende de h, el resto de los sumandos tiende a cero (su límite es cero).

Se concluye que Si $f(x) = x^m \Rightarrow f'(x) = m\,x^{m-1}$

- <u>Funciones exponenciales</u>. Sea la función $y = a^x$, siendo a una constante positiva distinta de 1. La derivada de esta función en un punto x es:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Se hace el cambio $a^h - 1 = t \to a^h = t + 1$ y se toman logaritmos neperianos:

$$ln(a^h) = ln(t+1) \to h\ ln\ a = ln(t+1) \to \;\to h = \frac{ln(t+1)}{ln\ a} \quad \text{Cuando } h \to 0,\ t \to a^0 - 1 = 0\ (t \to 0)$$

$$y' = a^x \cdot \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{ln(t+1)}{ln\ a}} = a^x \cdot \lim_{t\to 0} \frac{ln\ a}{\frac{1}{t}\, ln(t+1)} =$$

Luego:

$$= a^x \cdot ln\ a \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{ln(t+1)^{1/t}} = \left(\begin{array}{l} \text{Pero } \lim_{t\to 0} ln(t+1)^{1/t} = \\ \quad = ln \lim_{t\to 0} (t+1)^{1/t} = ln\ e = 1 \end{array} \right) = a^x \cdot ln\ a \cdot \frac{1}{1} = a^x \cdot ln\ a$$

En particular, cuando la constante a es el número e, la derivada de la función e^x es

$$(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$$

$$\text{Si } f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot ln\ a$$

$$\text{Si } g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$$

- <u>Función logaritmo neperiano</u> ln |x|

Puesto que el logaritmo está definido sólo para valores positivos y distintos de cero, es necesario considerar el logaritmo del valor absoluto de x.

Para calcular la derivada de esta función se han de considerar dos casos, $x > 0$ y $x < 0$:

a) Si x es positivo, aun tomando h negativo, x + h es positivo si se toman valores de h suficientemente pequeños, lo cual es posible pues se va a calcular el límite cuando h tiende a cero. En estas condiciones

$$|x+h| = x+h \text{ y } |x| = x \;;\quad \frac{ln\,(|x+h|) - ln\,|x|}{h} = \frac{ln\,(x+h) - ln\,x}{h} = \frac{1}{h}\cdot(ln\,(x+h) - ln\,x) = = \frac{1}{h}\cdot ln\frac{x+h}{x} = ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Por tanto, si x > 0

$$[ln(x)]' = \lim_{h\to 0} ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = ln\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] =$$

$$= ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = \longleftarrow \left[\begin{array}{l}\text{Llamando } \frac{h}{x} = n,\ h = nx \to \\ \to \frac{1}{h} = \frac{1}{nx} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x} \\ \text{Si } h\to 0,\ n\to 0\end{array}\right.$$

$$= ln\left[\lim_{n\to 0}\left((1+n)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \leftarrow \left[\text{Recordando que } \lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e\right. \qquad = ln\, e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\cdot ln\, e = \frac{1}{x}$$

b) Si x es negativo, aun tomando h positivo y suficientemente pequeño, x + h sigue siendo negativo y |x + h| = - (x + h) y |x| = - x.

$$\frac{ln(|x+h|) - ln|x|}{h} = \frac{ln(-(x+h)) - ln(-x)}{h} = \frac{1}{h}\cdot ln\left(\frac{-(x+h)}{-x}\right) = \frac{1}{h}\cdot ln\frac{x+h}{h}$$

Como se aprecia, se llega a la misma expresión que en el caso anterior y la demostración se continuaría de forma idéntica.

$$\text{Si } f(x) = ln\, x \to f'(x) = \frac{1}{x}$$

- <u>Función arcoseno</u>. Si y = arc sen x = $f^{-1}(x)$, aplicando f, f(y) = $f(f^{-1}(x))$ = x, es decir, sen y = x.

Derivando respecto a x, por la regla de la cadena, $y'\cdot cos\ y = 1$ ó $y' = \frac{1}{cos\ y}$

De la conocida fórmula $sen^2 y + cos^2 y = 1$, $cos^2 y = 1 - sen^2 y$

$cos\ y = \pm\sqrt{1-sen^2 y}$;

pero en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $cos\ y$ es positiva, por lo que $cos\ y = \sqrt{1-sen^2 y}$.

Por último, y puesto que $sen\ y = x$, $cos\ y = \sqrt{1-x^2}$

Llevando este resultado a la expresión de y', $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Si $h(x) = arc\ sen\ x \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- <u>Función arcocoseno</u>. Análogamente, la función cos x tiene una función inversa llamada «arco-coseno» y se simboliza por arc cos x. De y = arc cos x se deduce x = cos y. Derivando por la regla de la cadena,

$$1 = -y'\cdot sen\ y \to y' = \frac{-1}{sen\ y} \quad \text{Como } sen\ y = \sqrt{1-cos^2 y} = \sqrt{1-x^2},\ y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si $h(x) = arc\ cos\ x \Rightarrow h'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

- <u>Función arcotangente</u>. La inversa de la función tg x se llama «arco-tangente» y se simboliza por arc tg x. y = arc tg x, x = tg y. Derivando por la regla de la cadena,

$1 = y'(1 + tg^2\, y) = y'(1 + x^2)$. Despejando y', $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ Si $h(x) = arc\ tg\ x \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

- <u>Función arcocotangente</u>. La inversa de la función cotg x se llama «arco-cotangente» y se simboliza por arc cotg x. Si y = arc cotg x, x = cotg y. Derivando esta igualdad por la regla de la cadena,

$1 = -y' \cdot (1 + cotg^2 y) = -y' \cdot (1 + x^2)$. Despejando y', $y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$ Si $h(x) = arc\ cotg\ x \Rightarrow h'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$

- <u>Función arcosecante</u>. Análogamente a los casos anteriores, sec x tiene una función inversa llamada «arco secante» y simbolizada por arc sec x.
y = arc sec x, x = sec y. Derivando por la regla de la cadena,

$$1 = y' \cdot \sec y \cdot tg\ y = y' \cdot x \cdot tg\ y \quad (1)$$

Por trigonometría se sabe que $1 + tg^2\, y = \dfrac{1}{\cos^2 y} = sec^2\, y = x^2$, de donde

$$tg^2\, y = x^2 - 1 \rightarrow tg\ y = \sqrt{x^2-1}$$

Sustituyendo este valor en la igualdad (1), $1 = y' \cdot x\sqrt{x^2-1}$, y despejando y', $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Si $h(x) = arc\ sec\ x \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

- <u>Función arcocosecante</u>. Siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior, y = arc cosec x, x = cosec y

Derivando: 1 = - y' · cosec y · cotg y = - y' · x · cotg y (1)

Como $1 + cotg^2 y = \dfrac{1}{sen^2\, y} = cosec^2 y = x^2$, $cotg\ y = \sqrt{x^2-1}$

Llevando este resultado a la igualdad (1) y despejando y', $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Si $h(x) = arc\ cosec\ x \Rightarrow h'(x) = \dfrac{-1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$

<u>Actividad resuelta</u>

Usando la tabla de derivadas y las reglas de derivación calcula la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x) = 3x^5 - x^3 + 7x^2 - 2x + 4$ **<u>Resolución</u>** $f'(x) = 15x^4 - 3x^2 + 14x - 2$

2) $f(x) = -5x^4 + 2x^3 - x^2 + 9x - 6$ **<u>Resolución</u>** $f'(x) = -20x^3 + 6x^2 - 2x + 9$

3) $f(x) = -7x^6 + 3x^4 - 5x^2 + x + 2$ **<u>Resolución</u>** $f'(x) = -42x^5 + 12x^3 - 10x + 1$

4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ **<u>Resolución</u>** $f'(x) = 3x^2 - 12x + 15$

5) $f(x) = -3x^5 + 7x^2 - 2x + 9$ **Resolución** $f'(x) = -3(x^5)' + 7(x^2)' - 2(x)' + (9)' = -15x^4 + 14x - 2$

6) $f(x) = -x^4 + 6x^3 - 9x + 5$ **Resolución** $f'(x) = -4x^3 + 18x^2 - 9$

7) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 2x)$ **Resolución** $f(x) = x^5 + 2x^3 - x^3 - 2x = x^5 + x^3 - 2x \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2$

8) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ **Resolución** $f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 + \frac{1}{2}2x - 2.1 + 0 = x^2 + x - 2$

9) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$ **Resolución** $f'(x) = \frac{1}{4}(x^3)' - (x^2)' + (x)' = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1$

10) $f(x) =$ a) $y = \frac{1}{x} - 7x^2$ **Resolución** $f'(x) =$ $y' = \frac{-1}{x^2} - 14x$

11) $f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2} - \frac{6}{x} - 3$

Resolución

$$\underline{\text{Solución}}: f(x) = x^2 + 16x^{-2} - 6\frac{1}{x} - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x + 16(-2)x^{-3} - 6\frac{-1}{x^2} = 2x - \frac{32}{x^3} + \frac{6}{x^2} = \frac{2x^4 - 32 + 6x}{x^3}$$

12) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ **Resolución** $f(x) =$ $y = x^{2/3} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}x^{2/3 - 1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

13) c) $y = \sqrt[5]{x^3}$ **Resolución** $y = x^{3/5} \to y' = \frac{3}{5}x^{3/5 - 1} = \frac{3}{5}x^{-2/5} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

14) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$ **Resolución** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

15) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{x^3}$ **Resolución**

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} - 2.(-3)x^{-3-1} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + 6x^{-4} = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}} + \frac{6}{x^4}}$$

16) $f(x) = x^2 + 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ **Resolución** $f'(x) = 2x + 4.\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{x^2} = \boxed{2x + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}}$

17) $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[4]{x} + 1$

Resolución

$$\underline{\text{Solución}}: f(x) = 4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{4}} + 1 \Rightarrow f'(x) = 4\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} - 3\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{8}{3}x^{\frac{-1}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

18) $f(x) = \frac{1}{2x^3} - \frac{5}{4\sqrt[5]{x^2}} + 1$

Resolución

$$\text{Como } f(x) = \frac{1}{2}x^{-3} - \frac{5}{4}x^{-2/5} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(-3)x^{-4} - \frac{5}{4}\frac{-2}{5}x^{-7/5} + 0 = \frac{-3}{2x^4} + \frac{1}{2\sqrt[5]{x^7}}$$

19) b) $y = 3\sqrt{x} - \log_2(x)$ **Resolución** $y' = 3\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\,.\ln(2)}$

20) $f(x) = 5\log_3 x + 2\sqrt{x} - 3^x$ **Resolución** $f'(x) = 5\frac{1}{x\ln 3} + 2\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3^x\ln 3 = \frac{5}{x\ln 3} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 3^x\ln 3$

21) $f(x) = 3\log x + 4\sqrt{x} - 10^x$ **Resolución** $f'(x) = 3\frac{1}{x\ln 10} + 4\frac{1}{2\sqrt{x}} - 10^x\ln 10 = \frac{3}{x\ln 10} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 10^x\ln 10$

22) $f(x) = -2\log_4 x - 12\sqrt{x} + 5.2^x$ **Resolución** $f'(x) = -2\frac{1}{x\ln 4} - 12\frac{1}{2\sqrt{x}} + 5.2^x\ln 2 = \frac{-2}{x\ln 4} - \frac{6}{\sqrt{x}} + 5.2^x\ln 2$

23) $f(x) = \frac{1}{x} + 3\ln x - 2\sqrt{x} - 7^x + 2\log x$

Resolución

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + 3\frac{1}{x} - 2\frac{1}{2\sqrt{x}} + 7^x\ln 7 + 2\frac{1}{x\ln 10} = \frac{-1}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 7^x\ln 7 + \frac{2}{x\ln 10}$$

24) $f(x) = 2^x + \log_3 x$ **Resolución** $f'(x) = \boxed{2^x.\ln(2) + \frac{1}{x\ln(3)}}$

25) $f(x) = 3e^x - x + 7$ **Resolución** $f'(x) = 3(e^x)' - (x)' + (7)' = 3e^x - 1$

26) $f(x) = \frac{1}{x} + 8\ln x - x^2$

Resolución

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' + 8(\ln x)' - (x^2)' = \frac{-1}{x^2} + 8\frac{1}{x} - 2x = \frac{-1}{x^2} + \frac{8}{x} - 2x = \frac{-1+8x-2x^3}{x^2}$$

27) $f(x) = 3\text{sen } x - 5\cos x + \text{tg } x$

Resolución

$f'(x) = 3\cos x - 5(-\text{ sen } x) + 1 + \text{tg}^2x = 3\cos x + 5 \text{ sen } x + 1 + \text{tg}^2x$

28) $f(x) = \arccos x + \text{arcsen } x$ **Resolución** $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

29) $f(x) = x \,.\, \ln x$ **Resolución** $f'(x) = 1.\ln x + x.\frac{1}{x} = \boxed{\ln x + 1}$

30) $f(x) = (3x^2 + x)\ln x$

Resolución

$$f'(x) = (6x+1)\ln x + (3x^2+x)\frac{1}{x} = (6x+1)\ln x + \frac{x(3x+1)}{x} = (6x+1)\ln x + 3x + 1$$

31) $f(x) = x^2\ln x$ **Resolución** $f'(x) = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$

32) $f(x) = 3^x \ln x$ **Resolución** $f'(x) = (3^x)' \ln x + 3^x(\ln x)' = 3^x\ln 3 \ln x + 3^x \frac{1}{x} = 3^x(\ln 3 \ln x + \frac{1}{x})$

33) $f(x) = 2x^3\ln x$ **Resolución** $f'(x) = 6x^2\ln x + 2x^3\frac{1}{x} = 6x^2\ln x + 2x^2 = 2x^2(3\ln x + 1)$

34) $f(x) = 2x^5\ln x$ **Resolución** $f'(x) = 10x^4\ln x + 2x^5\frac{1}{x} = 10x^4\ln x + 2x^4 = 2x^4(5\ln x + 1)$

35) $f(x) = x^3 \ln x$ **Resolución** $f'(x) = (x^3)' \ln x + x^3(\ln x)' = 3x^2\ln x + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2\ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1)$

36) $f(x) = 3^x \ln x$ **Resolución** $f'(x) = (3^x)' \ln x + 3^x(\ln x)' = 3^x\ln 3 \ln x + 3^x \frac{1}{x} = 3^x(\ln 3 \ln x + \frac{1}{x})$

37) $f(x) = x^2e^x$ **Resolución** $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$

38) $f(x) = (3x+7)e^x$ **Resolución** $f'(x) = 3e^x + (3x+7)e^x = (3+3x+7)e^x = (3x+10)e^x$

39) $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$.

Resolución $f'(x) = (e^x)'(x^2 - x + 1) + e^x(x^2 - x + 1)' = e^x(x^2 - x + 1) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x)$

40) $f(x) = e^x\,(x^2 - 3x + 1)$ **Resolución** $f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 1) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - 3x + 1 + 2x - 3) = \boxed{e^x(x^2 - x - 2)}$

41) $f(x) = (x^2 - 5x + 3)e^x$

Resolución $f'(x) = (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 3)e^x = (2x - 5 + x^2 - 5x + 3)e^x = (x^2 - 3x - 2)e^x$

42) $f(x) = (x^3 + 3x^2)e^x$

Resolución $f'(x) = (3x^2 + 6x)e^x + (x^3 + 3x^2)e^x = xe^x(3x + 6 + x^2 + 3x) = xe^x(x^2 + 6x + 6)$

43) $f(x) = x^2\cos x$ **Resolución** $f'(x) = (x^2)'\cos x + x^2(\cos x)' = 2x\cos x + x^2(-\operatorname{sen} x) = x(2\cos x - x\operatorname{sen} x)$

44) $f(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$

Resolución

$$f'(x) = (e^x)'(\cos x + \operatorname{sen} x) + e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)' =$$
$$= e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + e^x(-\operatorname{sen} x + \cos x) = e^x(2\cos x) = 2e^x\cos x$$

45) $f(x) = x + xe^x$. **Resolución** $f'(x) = 1 + (x)'e^x + x(e^x)' = 1 + e^x + xe^x$

46) $f(x) = x\operatorname{arctg} x - 2\operatorname{arcsen} x$

Resolución

$$f'(x) = (x\operatorname{arctg} x)' - 2\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (x)'\operatorname{arctg} x + x(\operatorname{arctg} x)' - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

47) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$ **Resolución** $f'(x) = \dfrac{2(2x + 1) - (2x - 1).2}{(2x + 1)^2} = \dfrac{4x + 2 - 4x + 2}{(2x + 1)^2} = \dfrac{4}{(2x + 1)^2}$

48) $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x^2 + x}$

Resolución

$$f'(x)=\frac{3(x^2+x)-(3x-5).(2x+1)}{(x^2+x)^2}=\frac{3x^2+3x-(6x^2+3x-10x-5)}{(x^2+x)^2}=\frac{-3x^2+10x+5}{(x^2+x)^2}$$

49) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{2x+1}$

Resolución

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(2x+1)-(x^2-x+1).2}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2-1-2x^2+2x-2}{(2x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-3}{(2x+1)^2}$$

50) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

Solución: $f'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)'(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$

$$=\frac{2x^3+2x^2+2x-x^2-x-1-(2x^3+x^2-2x^2-x+2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$$

51) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{2x-5}$ **Resolución** $f'(x)=\dfrac{(6x+2)(2x-5)-(3x^2+2x-1).2}{(2x-5)^2}=\boxed{\dfrac{6x^2-30x-8}{(2x-5)^2}}$

52) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x}$

Resolución

$$f'(x)=\frac{(x^2+2x-3)'.(x^2-x)-(x^2+2x-3).(x^2-x)'}{(x^2-x)^2}=\frac{(2x+2).(x^2-x)-(x^2+2x-3).(2x-1)}{(x^2-x)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-2x^2+2x^2-2x-(2x^3-x^2+4x^2-2x-6x+3)}{(x^2-x)^2}=\frac{-3x^2+6x-3}{(x^2-x)^2}$$

53) $f(x)=\dfrac{5x^2-2x+1}{x^3}$

Resolución

$$f'(x)=\frac{(10x-2)x^3-(5x^2-2x+1).3x^2}{(x^3)^2}=\frac{x^2[(10x-2)x-(5x^2-2x+1).3}{x^6}=\frac{10x^2-2x-15x^2+6x-3}{x^4}=\frac{-5x^2+4x-3}{x^4}$$

54) $f(x)=\dfrac{4}{(x-2)(2x-1)}$

Resolución Como $f(x)=\dfrac{4}{2x^2-5x+2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{0.(2x^2-5x+2)-4(4x-5)}{(2x^2-5x+2)^2}=\dfrac{-16x+20}{(2x^2-5x+2)^2}$

55) $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^2}$

Resolución $f'(x)=\dfrac{2.(x+1)^2-2(x+1).2x}{(x+1)^4}=\dfrac{(x+1)[2(x+1)-4x]}{(x+1)^4}=\dfrac{2(x+1)-4x}{(x+1)^3}=\boxed{\dfrac{2-2x}{(x+1)^3}}$

56) $f(x)=\dfrac{1}{3x}-\dfrac{5}{x^2-2}$

Solución: $f(x)=\dfrac{x^2-2-15x}{3x(x^2-2)}=\dfrac{x^2-15x-2}{3x^3-6x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(x^2-15x-2)'(3x^3-6x)-(x^2-15x-2)(3x^3-6x)'}{(3x^3-6x)^2}=$

$=\dfrac{(2x-15)(3x^3-6x)-(x^2-15x-2)(9x^2-6)}{(3x^3-6x)^2}=\dfrac{-3x^4+90x^3+12x^2-12}{(3x^3-6x)^2}$

57) $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$ **Resolución** $f'(x)=\dfrac{(3x+1)'\sqrt{x}-(3x+1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=\dfrac{3\sqrt{x}-(3x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{\dfrac{6x-(3x+1)}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{3x-1}{2x\sqrt{x}}$

58) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ **Resolución** $f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x.1}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

59) $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$ **Resolución** $f'(x)=\dfrac{(e^x)'(x-1)-e^x(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{e^x(x-1)-e^x 1}{(x-1)^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

60) $f(x)=\dfrac{2^x+x^2}{x}$

Resolución

$f'(x)=\dfrac{(2^x+x^2)'x-(2^x+x^2)x'}{x^2}=\dfrac{(2^x\ln 2+2x)x-(2^x+x^2)1}{x^2}=\dfrac{x2^x\ln 2+2x^2-2^x-x^2}{x^2}=\dfrac{x^2+x2^x\ln 2-2^x}{x^2}$

61) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{e^x}$ **Resolución** $f'(x)=\dfrac{(2x+1)e^x-(x^2+x)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{(-x^2+x+1)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{-x^2+x+1}{e^x}$

62) $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

Resolución

$$\text{Solución}: f'(x)=\frac{(e^x+1)'(e^x-1)-(e^x+1)(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x(e^x-1)-(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x[e^x-1-(e^x+1)]}{(e^x-1)^2}=\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$$

63) $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2}$ **Resolución**

$$\text{Solución}: f'(x)=\frac{(2\ln x)'x^2-(2\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{2\frac{1}{x}x^2-(2\ln x)2x}{x^4}=\frac{2x-4x\ln x}{x^4}=\frac{2-4\ln x}{x^3}$$

64) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ **Resolución**

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x^2-(\ln x)2x}{(x^2)^2}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

65) $f(x)=\dfrac{3\ \ln(x)}{x^3}$

Resolución

$$f(x)=3\frac{\ln(x)}{x^3}\Rightarrow f'(x)=3.\frac{[\ln(x)]'.x^3-\ln(x).(x^3)'}{(x^3)^2}=3.\frac{\frac{1}{x}.x^3-\ln(x).3x^2}{x^6}=3.\frac{x^2-\ln(x).3x^2}{x^6}=3.\frac{x^2[1-3\ln(x)]}{x^6}=\boxed{3.\frac{1-3\ln(x)}{x^4}}$$

66) $f(x)=\dfrac{x-1}{2^x}$

Resolución

$$\text{Solución}: f'(x)=\frac{(x-1)'(2^x)-(x-1)(2^x)'}{(2^x)^2}=\frac{1(2^x)-(x-1)(2^x\ln 2)}{(2^x)^2}=\frac{2^x[1-(x-1)\ln 2]}{(2^x)^2}=\frac{1-(x-1)\ln 2}{2^x}$$

67) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{e^x}$

$$f'(x)=\frac{2\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x-2\sqrt{x}\,e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x})}{e^{2x}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{1}}{e^x}=\frac{\frac{1-2\sqrt{x}.\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{e^x}{1}}=\frac{1-2x}{e^x\sqrt{x}}$$

Resolución

68) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{2-\cos x}$

Resolución

$$f'(x)=\frac{(\operatorname{sen} x)'(2-\cos x)-\operatorname{sen} x(2-\cos x)'}{(2-\cos x)^2}=\frac{\cos x(2-\cos x)-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} x}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cos x-\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{(2-\cos x)^2}=\frac{2\cos x-1}{(2-\cos x)^2}$$

da $1-\ln x$

69) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{\ln x}{x}$ **Resolución** $f'(x)=(\sqrt{x})'+\frac{(\ln x)'x-(\ln x)(x)'}{x^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\frac{1}{x}x-(\ln x)1}{x^2}=\frac{x^2+(1-\ln x)2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}$

Actividades y problemas

Derivadas simples

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$y = -x^4 + 6x^3 - 9x$

$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

$y = \frac{x}{6} - \frac{7}{4}x^2 + \frac{2}{x}$

$y = \frac{-5}{x^3} - \frac{1}{x} + 2x - x^3$

$y = \frac{7x-1}{3}$

$y = 5(x-2)^2 - 3x$

$y = \frac{1}{x} - 5x^2$

$f(x) = x - 8x^2 + \frac{9}{x}$

$y = 25x + \frac{1}{x^2}$

$y = \frac{x^2-3x+4}{x-3}$

$y = \frac{2x+3}{3x-1}$

$y = \frac{x+2}{x-2}$

$y = \frac{-6}{x+1} - \frac{x}{x^2-1}$

a) $y=\frac{1}{5x}$

b) $y=\frac{-3}{x^2}$

c) $y=\frac{2}{x^3}$

d) $y=\frac{-1}{x^2-2x}$

e) $y=\frac{5}{2x^2-7x}$

b) $f(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^2-4x}$

c) $f(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{4}{x^5}$

d) $y=\dfrac{2}{3x^2-5x}$

$f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$

y = $\sqrt[5]{x^3}$ – 3x

$y=x^4$; $y'=4x^3$

$y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ $y'=\dfrac{2(2x-1)-2(2x+1)}{(2x-1)^2}=\dfrac{4x-2-4x-2}{(2x-1)^2}=\dfrac{-4}{(2x-1)^2}$

$y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$; $y=\dfrac{x^{1/2}}{x^2}=x^{1/2}.x^{-2}=x^{-3/2}$; $y'=\dfrac{-3}{2}.x^{\frac{-3}{2}-1}=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{x^{5/2}}=-\dfrac{3}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}=-\dfrac{3}{2\sqrt{x^5}}=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

$y=2^x$; $y'=2^{2x}.L2$

$y=\log_2 x$; $y'=\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{L2}=\dfrac{1}{xL2}$

y = (x^3-2x+1).(x + $\sqrt{x}$)

a) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

y = $\dfrac{x-1}{2^x}$

y = e^x (x^2 – 3x + 1)

a) $y=\dfrac{e^x}{x}$

b) $y=\dfrac{x}{e^x}$

c) $y=\dfrac{3e^x}{2x+1}$

d) $y=\dfrac{xe^x}{1-x}$

d) $y = \dfrac{e^x}{x+2}$

h(x) = $\dfrac{e^x}{x^3+1}$.

y = $2\sqrt{x} - \ln x$

f(x) = $\sqrt{x} - \log_3(x)$

y = $\sqrt[4]{x} + 3\sqrt{x} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}} + 7\log_5 x$

y = $x^2 . L x$

y = $\sqrt{x} . \log_3(x)$

y = $\dfrac{x}{\ln x}$

y = $(e^x + x - 1) L x$

a) y = $\cos^2 x \operatorname{sen} x$

b) y = cotg x

i. $f(x) = \dfrac{x^3 senx}{\tan x}$

y = $-4.2^x + 3 \operatorname{sen} x$

y = $(x - 5). \operatorname{tg} x$

y = $(2x - 5) \operatorname{sen} x$

$y = \dfrac{senx}{1+\cos x}$

a) $y = 3senx - 5\cos x$

c) $y = \cos x \cdot \operatorname{sen} x$

a) $y = \dfrac{1}{senx}$

b) $y = \dfrac{1}{\cos x}$

c) $y = \dfrac{\cos x}{senx}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

y = cotg x

a) $f(x) = 3x^2 - x + 5$ b) $f(x) = 6x^2 + 5x - 6$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ d) $f(x) = 4x^3 - x$

e) $f(x) = x + \ln(x)$ f) $f(x) = e^x - \sqrt{x} - 2$

a) $f(x) = x \cdot e^{x}$ b) $f(x) = x^{2} \cdot \ln(x)$ c) $f(x) = \dfrac{x^{4}}{e^{x}}$

d) $f(x) = \dfrac{e^{x}}{\ln(x)}$ e) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ f) $f(x) = x^{2} \cdot 2^{x}$

a) $f(t) = \left(t^{2}+1\right)\cdot\left(t^{3}+t^{2}+1\right)$ b) $f(z) = \dfrac{1}{2z} - \dfrac{1}{3z^{2}}$ c) $f(t) = \dfrac{t-1}{t^{2}+2t+1}$

d) $f(x) = \dfrac{3x}{x^{3}+7x-5}$ e) $f(x) = \dfrac{5-4x^{2}+x^{5}}{x^{3}}$ f) $f(x) = 4\sqrt{x^{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

****

Sean f y g funciones derivables. Selecciona todas las fórmulas que sean correctas
(f + g)´= f´ + g´
(k.f)' = k.f´, con k un número real
(f.g)´ = f´. g´
(f – g)´ = f´ – g´
(f/g)´= f´/g´
(f/g)´= (f´g – fg´)/g^2
(f/g)´= (f´g + fg´)/g^2
(f/g)´= (fg´ – f´g)/g^2
****
Si f(x) = 5x2, entonces f´(3) es igual a …
****
Elige la función cuya derivada es la misma función
función nula
función identidad
función exponencial de base e
sen x
cos x
No hay ninguna función

(x)´es igual a …
(x^2)´ es igual a …
(3)´es igual a …
(1/x)´es igual a …
(3^x)´ es igual a …
(ln x)´ es igual a …
$\left(\sqrt{x}\right)'$ es igual a …

$\left(\log_2 x\right)'$

2x
x
ln x
1/x
1
0
x2
−1/x2
1/x2

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3^x
3^x.ln 3

$\frac{1}{x \ln 2}$

$\log_2 x$

$\sqrt{x}$

****
(sen x)´ es igual a …
(cos x)´ es igual a …
(tg x)´ es igual a …
(arcsen x)´ es igual a …
(arccos x)´ es igual a …
(arctg x)´ es igual a …
(selecciona todas las opciones correctas)
sen x
cos x
−senx
−cos x
tg x
1 + tg2x
1/cos2x

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{1}{1+x^2}$

arcsen x
arccosen x
arctg x

Usando la tabla de derivadas y las reglas de derivación calcula la derivada de las siguientes funciones:

b) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{x^7}$

c) $f(x) = 6\sqrt{x} - \frac{1}{x}$

d) $f(x) = 3^x + \log_5 x$

****

e) $f(x) = e^x (2x^2 - 9x)$

f) $f(x) = x^2 . \ln x$

****

g) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x - 5}$

****

Un objeto se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación $s(t) = 2t^2 - 12t + 10$, donde s se mide en pies y t en segundos. Halla la velocidad del objeto cuando t = 0, 1, 2, 3 y 4

****

El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $s(t) = 3t^2 - t + 1$, donde s se mide en metros y t en segundos. Calcula la velocidad en el instante t = 2 segundos

****

Un niño deja caer una pelota desde una ventana que está a 60 m de altura sobre el suelo. Calcular:

a) ¿Qué tiempo tardara en caer?

b) ¿Con qué velocidad chocará con el suelo, dado que la ley de caída libre es $h = \frac{1}{2}gt^2$?

****

Un líquido fluye dentro de un estanque cilíndrico vertical de 6 [dm] de radio con una rapidez de 8[dm^3/seg], ¿con qué rapidez se eleva la superficie del líquido?

****

La trayectoria de una partícula en movimiento rectilíneo viene dada por: $S = 10t + \frac{2}{3}t^3$.

a) Hallar la variación de la velocidad de la partícula entre t=2seg. y t=5seg.

b) Hallar la aceleración media en ese intervalo.

c) Hallar la aceleración instantánea en t = 2 seg

****

Está entrando líquido en un depósito cilíndrico vertical de 3m de radio a razón de 1,5m^3/min.

a) ¿A qué ritmo está subiendo el nivel?

b) ¿En qué tiempo se llenará si su altura es de 4m?

****

En un globo esférico está escapando gas a razón de 2m^3/min.

¿A qué ritmo está decreciendo el área del globo cuando el radio es de 12 m?

****

La arena que cae de una tubería forma un montón cónico cuya altura es siempre 4/3 del radio de la base. ¿A qué ritmo está creciendo el volumen cuando el radio de la base es 3 pies y está creciendo a razón de 3 pulg/min?

****

El movimiento de cierta partícula viene expresado por la ecuación $x = 20 + 4t^2$.

a) Hallar el desplazamiento de la partícula en el intervalo de tiempo comprendido entre t = 2seg y t = 5 seg.

b) Hallar la velocidad media en ese intervalo de tiempo.
c) Hallar la velocidad instantánea en t = 2 seg
****

La fuerza neta sobre un proyectil sujeto a la resistencia del aire está dada por – mg j – bv, donde b es el coeficiente de arrastre (interacción entre el aire y el proyectil), y **v** es la velocidad.
Si se elige que el eje y sea positivo en dirección hacia arriba y el origen el punto de disparo, las coordenadas del proyectil en función del tiempo están dadas por

$$x(t)=\frac{v_{0x}}{b}\left(1-e^{-bt}\right) \qquad y(t)=\frac{g+bv_{0y}}{b^2}\left(1-e^{-bt}\right)-\frac{g}{b}t$$

Deriva las expresiones anteriores para demostrar que las componentes de la velocidad y de la aceleración están dadas por $v_x(t)=v_{0x}e^{-bt}$ $v_y(t)=\frac{g+bv_{0y}}{b}e^{-bt}-\frac{g}{b}$ $a_x(t)=-bv_{0x}e^{-bt}$ $a_y(t)=-(g+bv_{0y})e^{-bt}$

****

Una piscina de base rectangular con área 48 m^2 y profundidad 8m, comienza a llenarse con rapidez constante. La altura de lo que falta por llenar se modela mediante la función $h(t)=8-\left(\frac{1}{5}\right)t$, t en horas.

a. Determine la función $Q(t)$ que mide los metros cúbicos que faltan por llenar.
b. Encuentre la tasa de variación instantánea de las funciones $h(t)$ y $Q(t)$ al cabo de 5 horas.
c. ¿Qué relación existe entre las funciones derivadas de $h(t)$ y $Q(t)$?

****

El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $s(t)=3t^2-t+1$ donde s se mide en metros y t en segundos. Calcula la velocidad en el instante t = 2 segundos.

En un proceso isotérmico, un gas ideal mantiene la constante
10 at.l. La variación de presión es de 1 at. /min. ¿Cuál es la variación de volumen por minuto, cuando el manómetro marca 5 atmósferas?

La ley de Boyle-Mariotte, que regula el proceso es: $p.V=10$ o también:

$$V=\frac{10}{p}$$

Según el enunciado $\frac{dp}{dt}=1\ {at.}/{\min}$. Si calculamos la diferencial de V respecto a p tenemos que

$$dV=V'(p)dp \rightarrow dV=\frac{-10}{p^2}dp$$

Aplicando la regla de la cadena para diferenciales tenemos:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dp}\frac{dp}{dt}=\frac{-10}{p^2}1=\frac{-10}{p^2}$$

En el momento a considerar es cunado $p=5\ at.$ por tanto:

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{p=5}=\frac{-10}{p^2}=\frac{-10}{25}=-0{,}4\ {l.}/{\min}$$

En ese preciso instante, para el que $p = 5\ at.$, el volumen del gas está disminuyendo a razón de 0,4 litros por minuto.
****

La rampa de un tobogán, de esos que descienden los niños en los parques infantiles, está fabricado empalmando dos tramos, dos piezas metálicas. ¿Qué precaución hay que tomar al empalmar las dos piezas para que el descenso no ofrezca dificultad a los niños?

Se sabe que un tal tobogán tiene un tramo recto en su parte alta y un segundo tramo curvo. El tramo recto es el segmento AB, donde A(-3,4) y B(0,1). El tramo curvo empieza en B y desciende hasta el suelo ($y = 0$) al que llega con tangente horizontal. Si este tramo curvo es una parábola $y = ax^2 + bx + c$, hallar esta.
****