

## **Correction Agro 2017 – Résolution de problème**

Catherine ZEITOUN – Luc REJAUD

### **Partie 1 :**

1-1- La loi de Fourier s'écrit  $\vec{j}_{th} = -\lambda \cdot \vec{grad}T$

$\vec{j}_{th}$  est le vecteur densité de flux thermique qui s'exprime en  $W.m^{-2}$

$\lambda$  est la conductivité thermique du milieu qui s'exprime en  $W.m^{-1}.K^{-1}$

$T$  est la température en K

1-2- Il s'agit d'établir l'équation de la chaleur dans le cas unidirectionnel dans un milieu où il n'y a pas de sources volumiques ni d'échanges à travers les parois latérales.

On considère une tranche de ce milieu de section  $S$  comprise entre les abscisses  $x$  et  $x+dx$  et on applique le premier principe de la thermodynamique à ce système entre deux instants  $t$  et  $t+dt$ . On considère  $\vec{j}_{th} = j_{th}(x, t) \vec{u}_x$  pour une conduction unidirectionnelle selon  $Ox$ .

On obtient :  $d^2U = \rho \cdot S dx \cdot c \cdot dT = j_{th}(x, t) S dt - j_{th}(x + dx, t) S dt$

Soit  $\rho \cdot S dx \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dt = - \frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx \cdot S dt$

En introduisant la loi de Fourier dans l'expression et en simplifiant, on obtient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

1-3- La diffusivité thermique du milieu est  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$  et s'exprime en  $m^2.s^{-1}$ .

1-4- Le transfert thermique a lieu des zones chaudes vers les zones froides, dans le cas présent de  $x=0$  vers  $x=l$  car  $T(0)=T_1 > T(l)=T_2$ .

1-5- En régime permanent, l'équation de la chaleur se simplifie et devient :  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

La température est donc une fonction affine de  $x$  :  $T(x)=Ax+B$ . Les conditions aux limites permettent de déterminer les constantes  $A$  et  $B$ . On obtient :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1$$

1-6- Par définition la résistance thermique est définie par  $R_{th} = \frac{\Delta T}{P_{th}}$  où  $P_{th}$  est le flux thermique

donné par  $P_{th} = j_{th} S = \frac{T_1 - T_2}{l} \lambda S$  d'où  $R_{th} = \frac{l}{\lambda S}$

On en déduit l'expression de la conductance thermique :  $G_{th} = \frac{\lambda S}{l}$

1-7- Le problème est à symétrie sphérique donc  $T(r)$ . La loi de Fourier s'écrit dans ce cas :

$\vec{j}_{th} = j_{th}(r) \vec{u}_r = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$ . Ce vecteur est radial et orienté vers l'extérieur de la chouette.

1-8- Le flux thermique à travers une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$  est :

$$P_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} S = -4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr}$$

1-9- Comme il n'y a pas de sources volumiques dans le plumage, le régime étant permanent, le flux thermique à travers une sphère de rayon  $r$  est constant. Dans le cas contraire, il y aurait accumulation d'énergie entre deux sphères de rayon  $r_1$  et  $r_2$  au cours du temps, ce qui est exclu en régime permanent.

1-10- On sépare les variables avant d'intégrer entre  $R$  et  $R+e$  :

$$\frac{dr}{r^2} P_{th} = -\lambda 4\pi dT \text{ soit } \left[ \frac{-1}{R+e} - \frac{-1}{R} \right] P_{th} = -\lambda 4\pi (T_e - T_i)$$

On obtient :

$$\frac{P_{th}}{(T_i - T_e)} = \frac{\lambda 4\pi}{e} (R + e) R = G_{th}$$

En identifiant avec la formule de l'énoncé, on en déduit que  $\alpha = 4\pi$

1-11- Dans le cas où  $e$  est très petit devant  $R$  alors  $R + e \approx R$  et on obtient  $G_{th} = \frac{\lambda 4\pi}{e} R^2 = \frac{\lambda S}{e}$

## **Partie 2 :**

2-1- La conductance thermique massique est une grandeur pertinente à utiliser car l'inertie thermique est plus importante pour les objets massifs, un oiseau de faible masse se refroidira plus rapidement.

2-2- Pour le plumage en géométrie sphérique on obtient :

$$G_m = \frac{\lambda 4\pi}{e} (R + e) R \times \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho} = \frac{3\lambda(R+e)}{eR^2 \rho}$$

et si  $e \ll R$  :

$$G_m = \frac{\lambda S}{l} \times \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho} = \frac{3\lambda}{eR\rho}$$

2-3- La masse de l'oiseau est  $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$  soit  $R = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$

L'application numérique pour les deux masses fournies donne  $R_1 = 7,8$  cm et  $R_2 = 1,3$  cm.

$$R = \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$$

$$2-4- x = \frac{(R_1+e)}{e_1 R_1^2} \times \frac{e_2 R_2^2}{(R_2+e)} = 0,11$$

2-5- L'exposant  $2/3$  de la relation peut être justifié en modifiant la relation donnant la masse corporelle de l'oiseau :

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{3m}{4\pi\rho}\right)^{2/3}$$

2-6- On a montré que  $G_{m1} < G_{m2}$  ce qui permet de dire que le flux thermique par unité de masse est inférieur dans le cas d'un oiseau plus massif : Plus l'oiseau est de grande taille et plus il sera apte à vivre dans des climats froids.

2-7- Analyse des données du tableau :

- Le nombre de plumes par unité de masse ou par unité de surface corporelle augmente lorsque la masse de l'oiseau diminue.

- La masse de plumage par unité de masse corporelle est à peu près constante.
- La masse de plume par unité de surface corporelle diminue lorsque la masse de l'oiseau diminue.

Interprétation des résultats :

- Plus l'oiseau est de petite taille, plus sa surface corporelle est faible : le nombre de plume par unité de surface augmentant lorsque la taille de l'oiseau diminue, on peut penser que l'épaisseur de plumage augmente lorsque la taille de l'oiseau diminue : Cet effet est en faveur d'une résistance accrue au froid car si  $e$  augmente alors la conductance thermique diminue.
- La masse du plumage par unité de surface diminuant avec la taille de l'oiseau, on peut imaginer que le type de plume change : plumes moins denses de type duvet pour lesquelles la conductance thermique est probablement plus faible : cela va aussi dans le sens d'une diminution de l'effet discuté dans les questions précédente i.e. d'une plus grande résistance au froid.

**Partie 3 :**

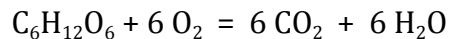
3-1- Il s'agit de trouver la droite d'équation  $y = a.x + b$  passant par le nuage de points  $(x_i, y_i)$  et qui minimise l'expression :  $\sum_{\oplus} (y_i - y)^2$  (méthode des moindres carrés)

3-2- Par lecture du graphe, on trouve approximativement  $V_0 = 0,45 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$

La régression linéaire fournie donne pour une température de  $2,5^\circ\text{C}$  :

$$V_0 = 0,401 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{h}^{-1} = 1,11 \cdot 10^{-4} \text{ L} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{On prendra cette valeur pour la suite}$$

3-3- Réaction d'oxydation du glucose :



$$\text{d'où } \alpha_{\square} = \alpha_{\text{H}_2\text{O}} = \alpha_{\text{CO}_2} = 6$$

$$3-4- \Delta_{\text{x}} H^\circ = 6 \Delta_{\text{x}} H^\circ(\text{CO}_2) + 6 \Delta_{\text{x}} H^\circ(\text{H}_2\text{O}) - \Delta_{\text{x}} H^\circ(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6) = -2798,42 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

3-5- Pour une mole de dioxygène consommée, la chaleur produite est :  $Q_1 = - \Delta_{\text{x}} H^\circ / 6 = 466,4 \text{ kJ}$

3-6- Dans le modèle du gaz parfait :  $V = nRT/P$  avec  $n = 1$ ,  $T = 275,65 \text{ K}$  et  $P = 10^5 \text{ Pa}$  :  
 $V = 22,9 \text{ L} = 22,9 \text{ dm}^3$

3-7- Par litre de dioxygène consommé, la chaleur produite est :  $Q_2 = - \Delta_{\text{x}} H^\circ / 6V = 466,4 / 22,9 = 20,37 \text{ kJ} \cdot \text{dm}^{-3}$

3-8- Cette valeur est très légèrement supérieure à celle de la littérature, mais l'accord est très bon. Elle a été calculée pour une température de  $2,5^\circ\text{C}$  soit  $275,65 \text{ K}$ . La valeur de  $20,1 \text{ kJ} \cdot \text{dm}^{-3}$  correspondrait à une température de  $275,65 \times 20,37 / 20,1 = 279 \text{ K}$ , à autres paramètres constants.

3-9- En évaluant la puissance consommée  $P_{\text{cons}}$  à partir de la consommation de dioxygène, et pour une consommation par unité de masse corporelle lue sur le graphe de  $0.45 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{h}^{-1} = 0.45 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$  :

$$P_{\text{cons}} = 1,11 \cdot 10^{-4} \times 20,1 \cdot 10^3 = 2,23 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = 2,23 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$$

3-10- La conductance thermique vaut  $G_{th} = P_{th} / \Delta T$

Or si le harfang est à l'équilibre thermique, la puissance  $P_{cons}$  produite par consommation de dioxygène est égale au flux thermique  $P_{th}$  évacué par conduction au travers du plumage :

$$G_{th} = P_{cons} / \Delta T = 2,23 / (41-2,5) = 6,05 \cdot 10^{-2} \text{ W.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

3-11- On trouve :  $\log G_m = -0,489$ , soit :  $G_m = 0,324 \text{ J.h}^{-1} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$   
 $= 9,00 \cdot 10^{-5} \text{ J.s}^{-1} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$   
 $= 9,00 \cdot 10^{-2} \text{ W.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

3-12- L'écart relatif avec la valeur calculée à la question 3-10- est :

$$\Delta G_m / G_m = (9,00 \cdot 10^{-2} - 6,05 \cdot 10^{-2}) / 9,00 \cdot 10^{-2} = 0,328 = 32,8\%$$

Le modèle établi à partir de la consommation de dioxygène fournit donc un bon ordre de grandeur de la conductance thermique.

L'écart observé montre que le harfang (de même que le manchot Adélie) a une conductivité thermique plus faible que celle de la moyenne mesurée sur les nombreuses espèces d'oiseaux. Cette plus faible conductivité, c'est à dire cette plus grande résistance thermique qu'il oppose aux transferts thermiques semble adaptée aux températures très basses de son milieu de vie.

La conductance thermique très faible du manchot Adélie est sans doute liée à une épaisse couche de graisse isolante.

#### **Partie 4 :**

4-1- Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen. Or le référentiel R lié au harfang est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. Donc R est un référentiel galiléen.

4-2- La viscosité cinématique  $\nu$  s'exprime en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

4-3- Le diamètre d'un cercle d'aire S vaut  $d = (4S/\pi)^{1/2}$

$$Re = U.L/\nu = \nu.(4S/\pi)^{1/2}/\nu = 15 \times (4 \times 1,3 \cdot 10^{-2} / \pi)^{1/2} / 1 \cdot 10^{-5} = 193\,000$$

Cette valeur du nombre de Reynolds étant très supérieure à 2000, l'écoulement considéré est **turbulent**.

4-4- Le travail de la force de résistance de l'air dépend du chemin suivi. En particulier le travail de cette force sur une trajectoire fermée est non nul :

$$W_{A-A} = -1/2 C_x \cdot \rho \cdot S \cdot v^2 \cdot L \neq 0 \quad \text{ou } L \text{ est la distance parcourue}$$

Ce n'est donc pas une force conservative.

$$\begin{aligned}
4-5- W &= -1/2 C_x \cdot S \cdot v^2 \cdot L \\
&= -0,5 \times 0,10 \times 1,5 \times 1,3 \cdot 10^{-2} \times 15^2 \times (15 \times 3600) \\
&= -11846 \text{ J}
\end{aligned}$$

4-6- Pour une puissance de  $P = 18\text{W}$ , l'énergie dépensée pendant une heure vaut

$$E = P \Delta t = 18 \times 3600 = \mathbf{64800 \text{ J}}$$

Cette valeur est très supérieure à l'énergie dépensée pour s'opposer aux forces de frottements avec l'air.

L'oiseau en vol doit également fournir l'énergie nécessaire pour lutter contre la pesanteur.

4-7- ??

### **Partie 5 :**

5-1- La loi postulée peut se mettre sous la forme :

$$\ln(V_V - V_0) = \ln A + \beta \cdot \ln(v)$$

Il faut alors tracer la courbe représentant  $\ln(V_V - V_0)$  en fonction de  $\ln(v)$ . L'obtention d'une droite validera la loi. La pente de cette droite donne alors la valeur de  $\beta$ .

5-2- On ne dispose que de 2 valeurs de vitesses de vent  $v$ .

$$\begin{aligned}
\text{On trouve } \beta &= [ \ln(V_2 - V_0) - \ln(V_1 - V_0) ] / [ \ln v_2 - \ln v_1 ] \\
&= [ \ln(0,337 - 0,0251 \cdot T_a) - \ln(0,260 - 0,0193 \cdot T_a) ] / [ \ln 7,47 - \ln 4,47 ]
\end{aligned}$$

*Problème : cette expression dépend de la température ambiante  $T_a$ , alors que l'énoncé précise que  $\beta$  n'en dépend pas ...*

Pour  $T_a = 0^\circ\text{C}$ , on trouve  **$\beta = 0,505$**

Pour  $T_a = -40^\circ\text{C}$ , on trouve  $\beta = 0,510$

La fluctuation en fonction de  $T_a$  semble donc faible.

5-3- Une analyse dimensionnelle montre que la diffusivité thermique  $D$  de l'air, qui s'exprime en  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ , peut s'exprimer sous la forme  $D = \bar{\delta}_T^2 / \tau$ , où  $\tau$  est le temps caractéristique et  $\bar{\delta}_T$  est la distance caractéristique de diffusion thermique.

$D' \text{ où } \tau = \bar{\delta}_T^2 / D.$

5-4-  $\tau' = x/v$ .

avec  $v$  la vitesse du vent dans la direction (Ox), et  $x$  une distance à parcourir dans la direction (Ox) par les particules d'air « emmenées » par le vent.

5-5- L'énoncé suggère d'identifier  $\tau$  et  $\tau'$ .

Quel est le sens physique de cette identification,  $\tau$  étant un temps caractéristique de diffusion thermique dans la direction (Oz) et  $\tau$  étant le temps mis par les particules d'air « emmenées » par le vent pour parcourir la distance  $x$  dans la direction (Ox) ??

Par identification on trouve :  $\delta_T^2/D = x/v$

$$\delta_T = (D.x/v)^{1/2}$$

A.N.  $\delta_T = 4,47.10^{-3}.(x/v)^{1/2}$  avec la valeur  $D = 20.10^{-6}$  S.I. Fournie en fin d'énoncé

5-6-  $d\Phi = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\lambda_a (\partial T / \partial z) \cdot dS$

Dans l'hypothèse d'un régime permanent, en l'absence de source et de perte thermique dans la couche d'épaisseur  $dz$ , le bilan thermique sur la couche de surface  $dS$  et comprise entre  $z$  et  $z+dz$  s'écrit :

$$d\Phi(z) - d\Phi(z+dz) = 0$$

$$\text{soit : } \partial(d\Phi) / \partial z = 0,$$

$$\text{soit encore : } d\Phi = \text{cste}$$

$$\text{D'où : } (\partial T / \partial z) = \text{cste} = (T_a - T_s) / \delta_T(x)$$

On en déduit

$$d\Phi = -\lambda_a \frac{(T_a - T_s)}{\delta_T(x)} dS = -\lambda_a \frac{(T_a - T_s)}{\sqrt{x/D}} \sqrt{v} dS$$

5-7- Pour calculer le flux total sortant de la plaque, on intègre l'expression précédente entre  $x = 0$  et  $x = L$  :

$$\Phi = \int_0^L d\Phi = \int_0^L -\lambda_a \frac{(T_a - T_s)}{\sqrt{x/D}} \sqrt{v} dS = -\lambda_a \frac{(T_a - T_s)}{\sqrt{D}} \sqrt{v} \int_0^L \frac{adx}{\sqrt{x}}$$

On obtient :

$$\Phi = -\lambda_a \frac{(T_a - T_s)}{\sqrt{D}} \sqrt{v} a [2\sqrt{x}]_0^L = 2a\lambda_a \sqrt{\frac{L}{D}} (T_a - T_s) v^{1/2}$$

Cette expression correspond à celle de l'énoncé, avec  $\beta = 1/2$

On retrouve la valeur  $1/2$  trouvée pour  $\beta$  à la question 5-2-

5-8- Le nombre de Reynolds à l'abscisse  $x$  a pour expression

$$Re_x = \frac{(\text{vitesse caractéristique})(\text{distance caractéristique transverse})}{\nu} = \frac{v.x}{\nu}$$

L'expression fournie donne donc une dépendance de  $\delta_T$  en  $v^{-1/2}$ , comme obtenu à la question 5-5-.

$$\begin{aligned}
 \text{A.N. } \delta_{\text{th}}(x) &= 4,92 \cdot x \cdot (v/v \cdot x)^{1/2} \cdot (D/v)^{1/3} \\
 &= 4,92 \cdot (x/v)^{1/2} \cdot v^{(1/2-1/3)} D^{1/3} = 20,48 \cdot 10^{-3} \cdot (x/v)^{1/2}
 \end{aligned}$$

On trouve numériquement une épaisseur environ 4 fois plus grande qu'à la question 5-5, (mais du même ordre de grandeur).