

 GENERALITAT VALENCIANA Conselleria d'Educació, Cultura, Universitats i Ocupació	PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	 SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO
CONVOCATÒRIA: JUNY 2025	CONVOCATORIA: JUNIO 2025	
ASSIGNATURA: MATEMÀTIQUES II	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II	

BAREMO DEL EXAMEN: Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.
La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto. Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40% de sus clientes piden pizza margarita, el 25% elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

1.1 (0,25 puntos) Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

1.2 (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Resolución

A = querer pizza margarita B = querer pizza vegetariana C = querer pizza pepperoni

1.1. Como $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,25$, entonces $p(C) = 1 - p(A) - p(B) = 1 - 0,4 - 0,25 = 0,35 = 35\%$

1.2. Como la probabilidad de elegir el mismo tipo de pizza es $0,4 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot 0,25 + 0,35 \cdot 0,35 = 0,345$, entonces la probabilidad de elegir distintos tipos de pizza es $1 - 0,345 = 0,655 = 65,5\%$

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

1.3 (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

1.4 (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

Resolución

Realizamos 10 veces el experimento aleatorio de elegir al azar una persona y preguntarle si prefiere pizza margarita y la probabilidad de que preferirla es 0,4, entonces la variable aleatoria $X = \text{“nº de personas que piden pizza margarita”} \rightarrow B(10 ; 0,4)$

La ley de probabilidad es $p_k = p(X = k) = \binom{10}{k} 0,4^k 0,6^{10-k}$, con $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 9, 10$.

1.3. Se pide $p(X = 4) = \binom{10}{4} 0,4^4 0,6^6 = 210 \cdot 0,4^4 0,6^6 \cong 0,2508 = 25,08\%$

1.4. Se pide $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0,4^0 0,6^{10} = 1 - 0,6^{10} \cong 0,994 = 99,4\%$

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es: $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$

2.1.1 (1,25 puntos) En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

Resolución

Sustituyendo $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$

Operando, $\begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$

Igualando elementos, $\{\alpha + \alpha^2 = \alpha, \alpha^2 = \alpha, \alpha(1 - \alpha)^2 = 1 - \alpha\}$ que sólo se cumple si $\alpha = 0$. Luego, debe ser $\alpha = 0$

2.1.2 (1,25 puntos) En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A. Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

Resolución

$\det A = \alpha(1 - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ó $\alpha = 1$. Luego, para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ existe la inversa de A y es

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} (\alpha(1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ -\alpha(1-\alpha) & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix})^t = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} (\alpha(1-\alpha) \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix})$$

Por tanto, la inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}$

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 6a + 10 - 6 + 3a + 15 + 8 = 9a + 27 = 0 \Leftrightarrow a = -3$$

- Si $a \neq -3$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $a = -3$, $\det A = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 2 & -3 & -5 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Como $|2 \ -3 \ 1 \ 1| = 5 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 & 2 & -3 & -5 & -3 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3f_3 - f_1 \\ 2f_3 - f_2 \\ (0 \ 5 \ 9 \ 9 \ 0 \ 5 \ 9 \ 9 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3) \end{matrix} \begin{matrix} f_1 = f_2 \\ (0 \ 5 \ 9 \ 9 \ 0 \ 5 \ 9 \ 9 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3) \end{matrix}$$

Como $|0 \ 5 \ 1 \ 1| = -5 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

2.2.2 (0,75 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Resolución

Para $a = -3$, sabemos del apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado y la matriz del sistema es equivalente a $(0 \ 5 \ 9 \ 9 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3)$, que corresponde al sistema $\{5y + 9z = 9x + y + 2z = 3$

Despejando, $y = \frac{9-9z}{5}$; $x = 3 - y - 2z = 3 - \frac{9-9z}{5} - 2z = \frac{15-9+9z-10z}{5} = \frac{6-z}{5}$

Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = \frac{6-k}{5} \ y = \frac{9-9k}{5} \ z = k \ , k \in \mathbb{R}$.

2.2.3 (0,75 puntos) Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

Resolución

Si $a = 0$ sabemos que el sistema tiene solución única. La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 & 2 & 0 & -5 & -3 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2f_3 + f_1 \\ (5 \ 0 \ 1 \ 6 \ 2 \ 0 & -5 & -3 & 1 & 1 & 2 & 3) \end{matrix} \begin{matrix} 5f_1 + f_2 \\ (27 \ 0 \ 0 \ 27 \ 2 \ 0 & -5 & -3 & 1 & 1 & 2 & 3) \end{matrix}$$

que corresponde al sistema

$$\{x = 1 \ 2x - 5z = -3 \ x + y + 2z = 3 \Rightarrow \{2 \cdot 1 - 5z = -3 \ 1 + y + 2z = 3 \Rightarrow \{z = 1 \ y + 2z = 2 \ ; \ y + 2 \cdot 1 = 2, y = 0$$

Luego, la solución es $x = z = 1, y = 0$

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dada la recta $r: \{x = 1 + 2\lambda \ y = \lambda \ z = 2 - \lambda$ y la recta $s: \{x = -1 \ x + 2y + z = 0$, calcular:

3.1.1 (1 punto) Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

Resolución

Sustituyendo r en s obtenemos

$$\{1 + 2\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -1 \ 1 + 2\lambda + 2\lambda + 2 - \lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Por tanto, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas son

$$\{x = 1 + 2(-1) \ y = -1 \ z = 2 - (-1) \Rightarrow \{x = -1 \ y = -1 \ z = 3$$

Las rectas se cortan en el punto $P(-1, -1, 3)$

3.1.2 (1 punto) La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

Resolución

Un vector director de r es $\vec{d}_r = (2, 1, -1)$ y en s , como $x = -1$, entonces $-1 + 2y + z = 0, z = 1 - 2y$

Llamando, $y = k$, obtenemos las ecuaciones paramétricas de s que son $s: \begin{cases} x = -1 \\ y = k \\ z = 1 - 2k \end{cases}$.

Luego, un vector director de s es $\vec{d}_s = (0, 1, -2)$

Un vector normal del plano π que piden es $\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1, 4, 2)$.

Como π pasa por

el punto de corte de r y s , $P(-1, -1, 3)$, $\pi: -1(x + 1) + 4(y + 1) + 2(z - 3) = 0 \Rightarrow \pi: -x + 4y + 2z - 3 = 0$

3.1.3 (0,5 puntos) La distancia del punto $P(1, 0, 2)$ a dicho plano.

Resolución

Observa que $P \in \pi$ porque cumple su ecuación: $-1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 3 = 0$. Luego $d(P, \pi) = 0$

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P(-1, 0, 1)$. Se pide:

3.2.1 (1 punto) La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q(2, 1, 2)$.

Resolución

Un vector normal del plano α que piden es $\vec{n} = \vec{n}_\pi \times \vec{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 3, 6) //$
 $(-1, 1, 2)$

Como α pasa por $Q(2, 1, 2)$, $\alpha: -1(x - 2) + 1(y - 1) + 2(z - 2) = 0 \Rightarrow \alpha: -x + y + 2z - 3 = 0$

3.2.2 (0,5 puntos) La distancia del punto Q al plano π .

Resolución

$Q(2, 1, 2)$ y $\pi: 3x - y + 2z - 4 = 0$. Usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano:

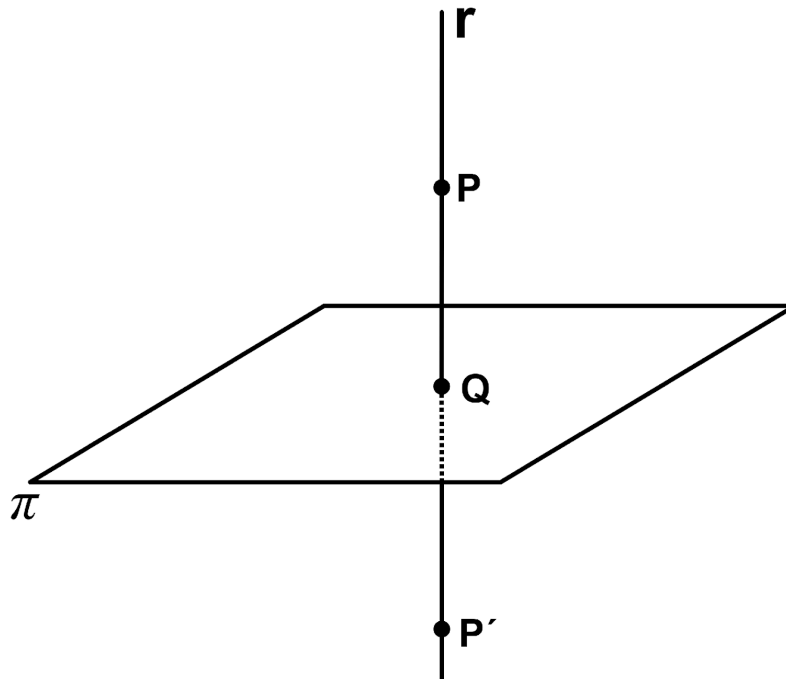
$$d(Q, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{14} \cong 1,3363 \text{ u}$$

3.2.3 (1 punto) El punto simétrico de P respecto al plano π .

Resolución

$P(-1, 0, 1)$ y $\pi: 3x - y + 2z - 4 = 0$. Observa que $P \notin \pi$ porque no cumple su ecuación:

$$3(-1) - 0 + 2 \cdot 1 - 4 = -5 \neq 0$$



- Hallamos la recta r que pasa por P y es ortogonal a π :

Un vector director de r es el vector normal del plano, $\vec{d} = \vec{n} = (3, -1, 2)$. Luego,
 $r: \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = -k \\ z = 1 + 2k \end{cases}$

- Hallamos el punto de corte, Q , entre el plano π y la recta resolviendo el sistema de ecuaciones:

Sustituyendo en la ecuación del plano, $3(-1 + 3k) - (-k) + 2(1 + 2k) - 4 = 0 \Rightarrow 14k = 5; k = \frac{5}{14}$

Luego, $\begin{cases} x = -1 + 3\frac{5}{14} \\ y = -\frac{5}{14} \\ z = 1 + 2\frac{5}{14} \end{cases}$. El punto de corte es $Q\left(\frac{1}{14}, \frac{-5}{14}, \frac{12}{7}\right)$

- Por último, hallamos el simétrico $P'(a, b, c)$ de $P(-1, 0, 1)$ usando que Q es el punto medio del segmento PP' :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{a-1}{2} &= \frac{1}{14}, & 14a - 14 &= 2 \Rightarrow a = \frac{8}{7} \\ \frac{b+0}{2} &= \frac{-5}{14}, & 14b &= -10 \Rightarrow b = \frac{-5}{7} \\ \frac{c+1}{2} &= \frac{12}{7}, & 7c + 7 &= 24 \Rightarrow c = \frac{17}{7} \end{aligned} \right.$$

. El punto simétrico que se pide es $P'\left(\frac{8}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{17}{7}\right)$

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

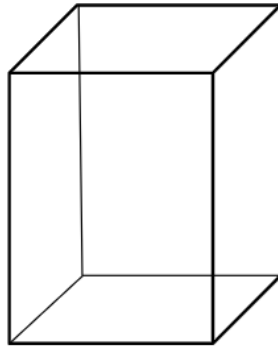
4.1 Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro. Obtener:

4.1.1 (0,75 puntos) La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .

4.1.2 (1,25 puntos) Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.

4.1.3 (0,5 puntos) El precio del material en el caso anterior.

Resolución



Sea x el lado de la base de la caja e y la altura de la caja. Como el volumen es $V(x) = x^2 y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{x^2}$

4.1.1 El precio en céntimos sería $P(x) = 1,4xy + 1,25 \cdot 2x^2 = 4x \frac{80}{x^2} + 2,5x^2 \Rightarrow P(x) = \frac{320}{x} + 2,5x^2$

$$P'(x) = \frac{-320}{x^2} + 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{320}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{320}{5} = 64 \Rightarrow x = 4$$

Como $P''(x) = (-320x^{-2} + 5x) = \frac{640}{x^3} + 5$, entonces $P''(4) = \frac{640}{4^3} + 5 > 0$ (mínimo para $x = 4$)

4.1.2 Las dimensiones de la caja son $x = 4$ cm, $y = \frac{80}{x^2} = 5$ cm

4.1.3 El precio del material es $P(4) = \frac{320}{4} + 2,5 \cdot 4^2 = 120$ céntimos = 1,20 €

4.2 Dada la función real de variable real $f(x) = x|x - 2|$. Se pide:

4.2.1 (1 punto) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

4.2.2 (1,5 puntos) Calcular el área de la región anterior.

Resolución

Como $f(x) = x|x - 2| = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$, la gráfica corta a los ejes en $(0, 0)$ y $(2, 0)$

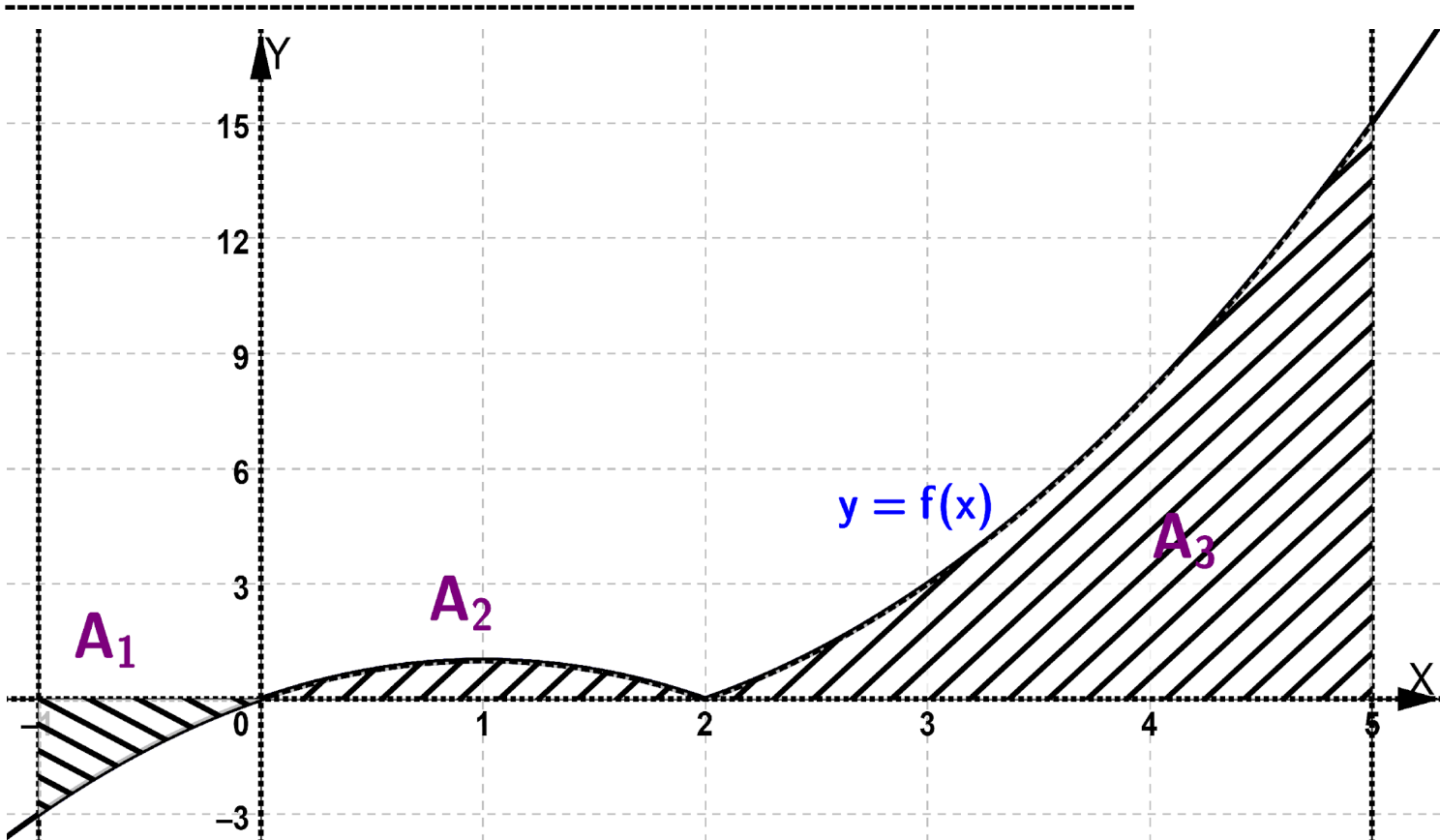
Como $f(-1) = -1|-1 - 2| = -3$ y $f(5) = 5|5 - 2| = 15$, la gráfica corta a las rectas $x = -1$

y $x = 5$ en $(-1, -3)$ y $(5, 15)$, respectivamente...

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}; \text{ para } x < 2, f'(x) = 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad f''(x) = -2, f''(1) = -2 < 0 \text{ (máximo)}$$

Además $f(1) = 1|1 - 2| = 1$ [mínimo $(1, 1)$]. Por otra parte, para $x > 2$, $f'(x) = 2x - 2 > 0$ (f es creciente)

Usando todo lo anterior la región cuya área se pide es



Recordemos que $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 2x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

El área que se pide es $A = A_1 + A_2 + A_3$

$$A_1 = - \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 (2x - x^2) dx. \text{ Una primitiva es } p(x) = x^2 - \frac{x^3}{3} = \frac{3x^2 - x^3}{3}.$$

Por la regla de Barrow, $A_1 = p(1) - p(0) = \frac{3 \cdot 1^2 - 1^3}{3} - \frac{3 \cdot 0^2 - 0^3}{3} = \frac{2}{3}$

$$A_2 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx. \text{ Una primitiva es } p(x) = x^2 - \frac{x^3}{3} = \frac{3x^2 - x^3}{3}.$$

Por la regla de Barrow, $A_2 = p(2) - p(0) = \frac{3 \cdot 2^2 - 2^3}{3} - \frac{3 \cdot 0^2 - 0^3}{3} = \frac{4}{3}$

$$A_3 = \int_2^5 f(x) dx = \int_2^5 (2x^2 - 2x) dx. \text{ Una primitiva es } q(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 = \frac{x^3 - 3x^2}{3}.$$

Por la regla de Barrow, $A_3 = q(5) - q(2) = \frac{5^3 - 3 \cdot 5^2}{3} - \frac{2^3 - 3 \cdot 2^2}{3} = \frac{54}{3}$

Luego, el área que se pide es $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{54}{3} = \frac{60}{3} = 20 \text{ u}^2$

