

Занятие 1

Могут ли у двух последовательных шестизначных чисел суммы цифр делиться на 7?

На озере есть 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 или 5 мостов. Обязательно ли хотя бы один из этих мостов выходит на берег озера?

По кругу написано семь натуральных чисел. Обязательно ли найдутся два соседних числа, сумма которых чётна?

Из набора домино выбросили все кости с шестёрками. Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд по правилам игры?

Существует ли многоугольник с вершинами в 16 точках, отмеченных на рисунке? (Вершины многоугольника не могут лежать на его сторонах.)



Можно ли поверхность куба с ребром 1 оклеить четырьмя треугольниками площади 1.5?

В поезде едут три мудреца. Внезапно поезд въезжает в туннель, и после того, как загорается свет, каждый из мудрецов видит, что лица его коллег испачканы сажей, влетевшей в окно вагона. Все трое начинают смеяться над своими испачкавшимися попутчиками, однако внезапно самый сообразительный мудрец догадывается, что его лицо тоже испачкано. Как ему это удалось?

Домашнее задание

На клетчатой бумаге отмечено 25 вершин клеток (вершины, расположенные внутри и на сторонах квадрата 4×4). Нарисуйте пять окружностей так, чтобы они проходили через все отмеченные точки.

Занятие 2

Можно ли поверхность куба с ребром 1 оклеить шестью треугольниками площади 1?

Николай с сыном и Пётр с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько и его сын, а Пётр – втрое больше, чем его сын. Всего было поймано 25 рыб. Как зовут сына Петра?

Могут ли четыре прямые пересекаться ровно в трёх точках?

Могут ли четыре прямые, среди которых ровно две параллельны, пересекаться ровно в трёх точках?

Приведите пример десятизначного числа, первая цифра которого - количество единиц в этом числе, вторая - количество двоек, ..., девятая - количество девяток, десятая - количество нулей.

На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Его прокатили по доске, перекатывая через рёбра, так, что кубик побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что одна из его граней ни разу не лежала на доске?

На каждой из 15 планет, расстояния между которыми попарно различны, находится один астроном, который наблюдает ближайшую к нему планету. Докажите, что некоторую планету никто не наблюдает.

Найдите наименьшее натуральное число, квадрат которого делится на 504.

Как разделить семь яблок между 12 мальчиками, если ни одно яблоко нельзя резать более чем на четыре части?

Домашнее задание

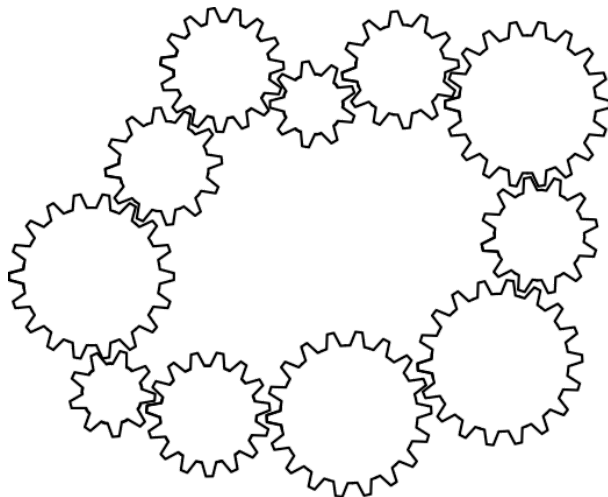
Обезьяна хочет узнать, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился (или выяснить, что он вообще не разбивается).

а) Пусть у неё 1 орех. Какого наименьшего числа бросков ей точно хватит?

б) Пусть у обезьяны есть 2 одинаковых ореха. Хватит ли ей 7 бросков?

в) А хватит ли ей 5 бросков?

Занятие 3



Одиннадцать шестерёнок соединены по цепочке. Смогут ли они вращаться?

В школе 450 учеников и 225 парт. Ровно половина девочек сидят за одной партой с мальчиками. Можно ли пересадить учеников так, чтобы ровно половина мальчиков сидела за одной партой с девочками?

Существуют ли два пятиугольника, у которых все вершины общие, но нет ни одной общей стороны?

Расположите шесть одинаковых незаточенных круглых карандашей так, чтобы каждый карандаш касался всех остальных. А можно ли так расположить семь карандашей?

Группа туристов делит печенье. Если они разделят поровну две одинаковые пачки, останется одно лишнее печенье. А если разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних печений. Сколько туристов в группе?

Сколько раз в сутки минутная и часовая стрелки часов совпадают?

Сколько раз в сутки минутная и часовая стрелки часов образуют угол 90° ?

Домашнее задание

Число m даёт остаток 68 при делении на 777 и остаток 69 при делении на 778. Найдите остаток от деления m на 14.

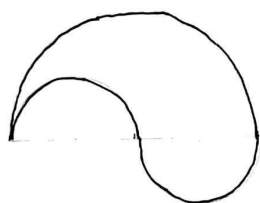
Занятие 4

Даны пять чисел, сумма любых трёх из которых чётна. Обязательно ли все данные числа чётные?

Приведите пример числа N , для которого три из утверждений «число N делится на 2», «число N делится на 4», «число N делится на 12» и «число N делится на 24» верные, а одно неверное.

Из утверждений «число N делится на 2», «число N делится на 4», «число N делится на 12» и «число N делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое?

Можно ли разрезать фигуру, ограниченную тремя полуокружностями, на две равные части?



На доске написано несколько натуральных чисел, между которыми написаны знаки плюс и минус. Можно ли заменить несколько знаков на противоположные, чтобы значение выражения увеличилось на 1?

Отметьте 10 точек так, чтобы через пары этих точек проходило ровно 10 различных прямых.

Можно ли из пяти одинаковых прямоугольников составить развёртку прямоугольного параллелепипеда?

Поставьте в каждом из шести чисел по одной точке так, чтобы равенство стало верным:

$$2016+2016+2016+2016+2016 = 46368.$$

Домашнее задание

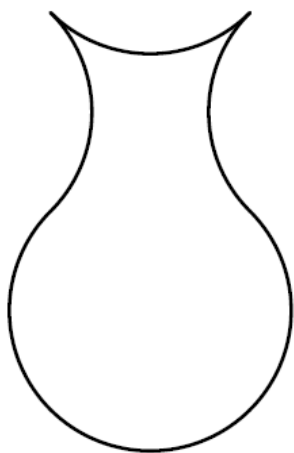
В квадрате 4×4 отмечено 15 точек. Докажите, что из него можно вырезать квадратик 1×1 , не содержащий внутри отмеченных точек (на границе квадратика точка лежать может).

Занятие 5

3 маляра за 5 дней могут покрасить 60 окон. Сколько окон покрасят 5 маляров за 4 дня?

Найдите наименьшее натуральное число, которое после умножения на 2 становится квадратом, а после умножения на 3 - кубом целого числа.

Цифры четырёхзначного числа записали сначала в порядке убывания (первая цифра самая большая, последняя самая маленькая), потом в порядке возрастания. Разность между записанными числами оказалась равной исходному числу. Найдите это число.



Ваза составлена из шести одинаковых четвертей окружностей. Разрежьте её на три части, из которых можно сложить квадрат.

В одной куче 20 камней, в другой 30. Двое по очереди берут за один ход несколько камней из одной из куч. Выигрывает тот, кто забирает последний камень. Кто и как может обеспечить себе выигрыш - первый или второй?

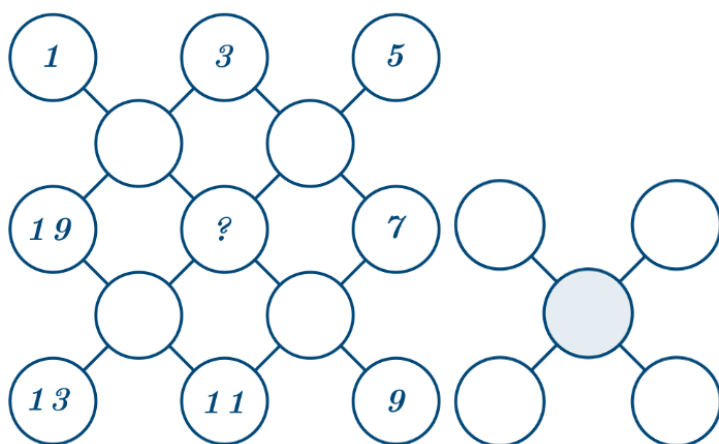
10 человек собрали вместе 46 грибов, причём известно, что нет двух человек, собравших одинаковое число грибов. Сколько грибов собрал каждый?

Имеется много купюр по 20 и 200 шекелей. Можно ли набрать 20 000 шекелей, используя ровно 500 купюр?

Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет лишь через целое число часов.

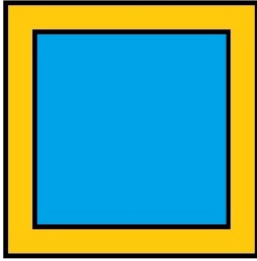
Сумма пяти различных положительных целых чисел равна 27, а их произведение нечётно. Чему равно это произведение?

Каждое число, которое соединено с четырьмя другими числами, должно равняться их среднему арифметическому. Чему равно число в кружке, обозначенном знаком вопроса?



Картофель подешевел на 20%. На сколько процентов больше картофеля можно купить за ту же сумму денег?

На рисунке вокруг синего квадрата есть жёлтая дорожка. Площадь дорожки составляет 44% площади синего квадрата. Чему равна ширина дорожки (в процентах от стороны синего квадрата)?

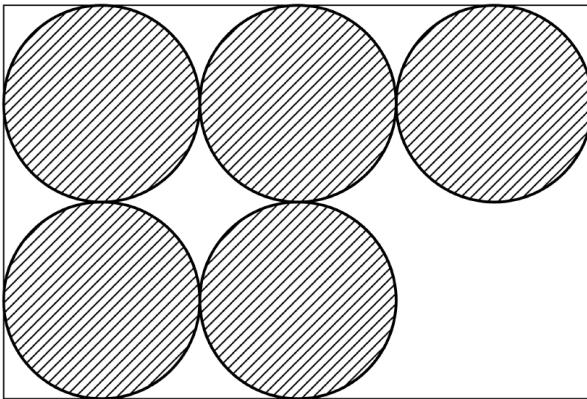


Домашнее задание

Двое игроков по очереди кладут одинаковые круглые монеты на прямоугольный стол на свободное от монет место. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Докажите, что делающий первый ход всегда сможет выиграть.

Занятие 7

В прямоугольной коробке лежало 6 одинаковых пирожных. Одно из них съели. Как одним прямолинейным разрезом ножа разделить оставшиеся пирожные на две равноценные части?



На столе стоят 7 стаканов – все вверх дном. За один ход можно перевернуть любые 4 стакана. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

На столе стоят 8 стаканов – все вверх дном. За один ход можно перевернуть любые 7 стаканов. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

Замостите плоскость одинаковыми: а) пятиугольниками; б) семиугольниками.

В опросе приняли участие 13 рыцарей и 12 лжецов. В ходе опроса каждого спросили про каждого (в том числе, про него самого), говорит ли он правду. Сколько было ответов «да»?

За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Обязательно ли у кого-то из сидящих за столом оба соседа – мальчики?

Отмечены четыре точки, и через каждую пару этих точек проведена прямая. Сколько всего проведено разных прямых? Рассмотрите все возможные случаи.

Сложите шесть спичек так, чтобы они образовали четыре

равносторонних треугольника.

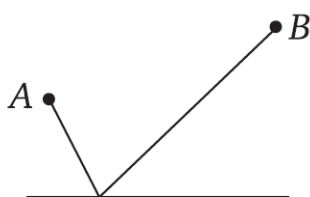
Домашнее задание

Отметьте на плоскости 7 точек так, чтобы ровно 11 из отрезков, соединяющих эти точки, имели длину 1. (Попробуйте придумать два разных расположения этих точек.)

Занятие 8

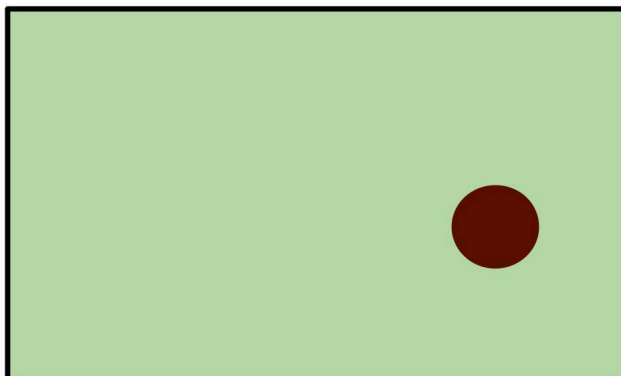
Укажите какое-нибудь число, у которого ровно 4 делителя (включая 1 и само число).

Туристы поставили две палатки в точках A и B, неподалёку от берега реки. Туристы из одной палатки хотят навестить друзей из другой палатки и по дороге искупаться. Как им выбрать кратчайший путь?



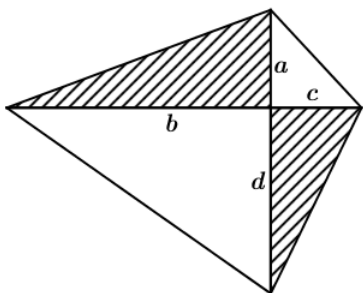
В первом пенале лежат лиловая ручка, зелёный карандаш и красный ластик; во втором — синяя ручка, зелёный карандаш и жёлтый ластик; в третьем — лиловая ручка, оранжевый карандаш и жёлтый ластик. В каждом из двух этих пеналов ровно одна пара предметов совпадает и по цвету, и по назначению. Что должно лежать в четвёртом пенале, чтобы эта закономерность сохранилась? (В каждом пенале лежат ровно три предмета: ручка, карандаш и ластик.)

На прямоугольном торте лежит круглая шоколадка. Как разрезать торт на две равные части так, чтобы и шоколадка тоже разделилась



ровно пополам?

Докажите, что произведение площадей закрашенных фигур равно произведению площадей белых.



Площади граней прямоугольной коробки равны 6, 10 и 15. Чему равен её объём?

Восстановите пропущенные цифры:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 399 * 68 **.$$

Найдите наименьшее натуральное число, дающее остаток 1 при делении на 2, 2 – при делении на 3, ..., 7 – при делении на 8.

Если от некоторого трёхзначного числа отнять 6, то оно разделится на 7, если отнять 7, то оно разделится на 8, а если отнять 8, то оно разделится на 9. Определите это число.

Можно ли расставить числа: а) от 1 до 7; б) от 1 до 9 по кругу так, чтобы каждое из них делилось на разность своих соседей?

Домашнее задание

На какое наименьшее число частей нужно разрезать пирог, чтобы их можно было поровну разделить как на троих, так и на четверых?

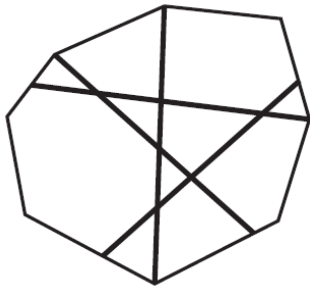
Занятие 9

В стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что есть город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам.

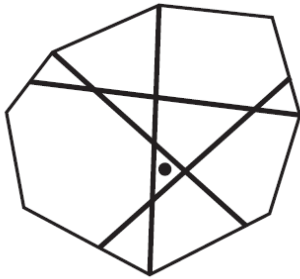
Во фразе, взятой в кавычки, подставьте вместо многоточий числа так, чтобы она оказалась верной. “В этой фразе участвуют цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, причём цифра 0 - ... раз, цифра 1 - ... раз, цифра 2 - ... раз, цифра 3 - ... раз, цифра 4 - ... раз, цифра 5 - ... раз, цифра 6 - ... раз, цифра 7 - ... раз, цифра 8 - ... раз, цифра 9 - ... раз”.

Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

Через двор проходят четыре пересекающиеся тропинки. Посадите четыре яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки яблонь было поровну.



Во дворе, где проходят четыре пересекающиеся тропинки, растёт одна яблоня. Посадите ещё три яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки яблонь было поровну.



В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединён авиалиниями не более чем с тремя другими, и из любого города можно долететь в любой другой, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

Докажите, что при делении на 9 число даёт такой же остаток, как и его сумма цифр.

Из числа вычли число, составленное из тех же цифр, но в другом порядке. Докажите, что полученное число делится на 9.

Произведение 1000 натуральных чисел равно 1000. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих чисел?

Домашнее задание

На столе лежит 25 спичек. Играющие по очереди могут взять 1, 2 или 4 спички (но не 3). Кто не может сделать ход (спичек не осталось), проигрывает. Кто может обеспечить себе выигрыш: первый или второй?

Занятие 10

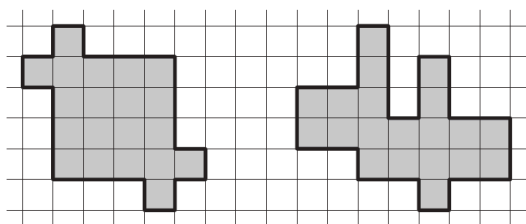
Используя каждую из цифр от 0 до 9 ровно один раз, запишите 5 отличных от нуля чисел так, чтобы каждое делилось на предыдущее.

Расставьте по кругу четыре единицы, три двойки и три тройки так, чтобы сумма любых трёх стоящих подряд чисел не делилась на 3.

В государстве n городов, и из каждого города выходит m дорог, ведущих в другие города. Сколько всего дорог в государстве?

Сколько диагоналей у n -угольника?

Разрежьте по линиям сетки на две равные части фигуру, изображённую на рисунке слева, и сложите из них фигуру, изображённую справа.



На складе хранилось 100 кг ягод, содержание воды в которых составляло 99%. От долгого хранения содержание воды в ягодах сократилось до 98%. Сколько теперь весят ягоды?

Запишите в строку 5 целых чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была отрицательна, а сумма всех пяти чисел была положительна.

Запишите в строку 5 целых чисел так, чтобы сумма любых трёх соседних чисел была отрицательна, а сумма всех пяти чисел была положительна.

Запишите в строку 5 целых чисел так, чтобы сумма любых четырёх соседних чисел была отрицательна, а сумма всех пяти чисел была положительна.

За один ход разрешается или удваивать число, или стирать его последнюю цифру. Можно ли за несколько ходов получить из числа 458 число 14?

На какое наибольшее число кусков можно разделить круглый блинчик тремя прямолинейными разрезами?

Как разделить блинчик тремя прямолинейными разрезами на 4, 5, 6, 7 частей?

Домашнее задание

а) Запишите в строку 9 чисел так, чтобы сумма любых четырёх последовательных чисел была положительна, а сумма любых семи последовательных чисел отрицательна.

б) Запишите в строку 16 чисел так, чтобы сумма любых 7 последовательных чисел была отрицательна, а сумма любых 11 последовательных чисел положительна.

Занятие 11

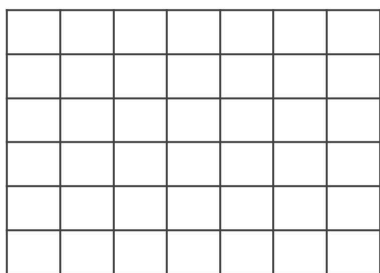
На плоскости нарисован чёрный квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть чёрного квадрата (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

Проведите 5 прямых так, чтобы у них было ровно: а) 8; б) 9 точек пересечения.

Есть пять карточек с цифрами: 1, 2, 3, 4 и 5. Составьте из этих карточек два числа — трёхзначное и двузначное — так, чтобы первое число делилось на второе.

По углам квадратного пруда растут четыре старых дуба. Можно ли увеличить пруд, сохранив его квадратную форму, так, чтобы дубы остались на своих местах, не были затоплены водой, а стояли у берегов нового пруда?

На клетчатом листе нарисован прямоугольник 6×7 . Разрежьте его по линиям сетки на пять каких-нибудь квадратов.



Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит три дороги, быть ровно 100 дорог?

Каждая дорога соединяет два города в государстве. Докажите, что количество городов, из которых выходит нечётное число дорог, чётно.

На клетчатом листе бумаги закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число закрашенных соседей?

Можно ли записать в строку 6 чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна?

Можно ли записать в строку 9 чисел так, чтобы сумма любых трёх соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна?

Домашнее задание

На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 12, во второй - 15. Какое число написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

Занятие 12

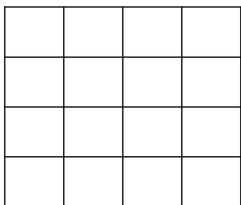
Найдите наибольший общий делитель всех пятизначных чисел, записанных цифрами 1, 2, 3, 4, 5 без повторений.

Найдите наибольший общий делитель всех девятизначных чисел, записанных цифрами 1, 2, 3, ..., 9 без повторений.

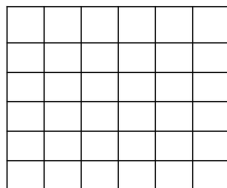
Найдите наибольшее значение, которое может принимать выражение $aek - afh + bfg - bdk + cdh - ceg$, если каждое из чисел $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ равно ± 1 .

Числа 100 и 90 разделили на одно и то же число. В первом случае в остатке получили 4, а во втором - 18. На какое число делили?

Расставьте в клетках квадрата 4×4 знаки плюс и минус так, чтобы для любой клетки ровно в одной соседней с ней по стороне был противоположный знак.



Какое наибольшее число клеток доски 6×6 можно закрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не соприкасались



(даже в одной точке)?

а) Сложите из 10 карточек с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 двузначные числа, которые относятся как 1:2:3:4:5.

б) Уберите карточку с цифрой 0 и из оставшихся карточек сложите пять чисел с тем же отношением.

Домашнее задание

Среди первых 2000 чисел найдите три различных числа, наибольший общий делитель которых является наибольшим из всех возможных.

Занятие 13

Пусть p и q – различные простые числа. Сколько

делителей у числа $p^m q^n$ (включая 1 и $p^m q^n$)?

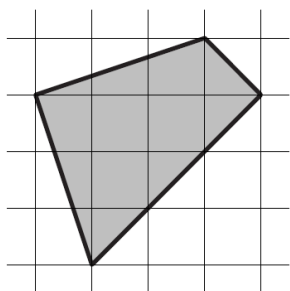
Пять тетрадей — синяя, зелёная, оранжевая, красная и жёлтая — лежали в стопке в определённом порядке. Их разложили на столе в две стопки: сначала верхнюю тетрадь, потом следующую за ней и т. д. В результате в первой стопке оказались: на столе — красная тетрадь, на ней — жёлтая, сверху — зелёная; во второй: на столе — оранжевая тетрадь, на ней — синяя. Затем тетради собрали в одну стопку в прежнем порядке и вновь выложили на стол, снимая их так же поочерёдно сверху стопки. На этот раз в

первой стопке лежали: на столе — оранжевая тетрадь, на ней — красная; во второй: на столе — жёлтая тетрадь, на ней — зелёная, сверху — синяя. В каком порядке тетради лежали в стопке первоначально?

Десять человек приветствовали друг друга рукопожатиями. Пять человек сделали по семь рукопожатий, трое — по пять и двое — по четыре. Сколько всего было сделано рукопожатий?

В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга в этом классе, 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?

Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на четыре равные части.



а) Можно ли испечь торт, который разделяется прямолинейным разрезом на 4 части? б) А на 4 равные части?

Последние цифры двух чисел разные. Могут ли последние цифры их кубов быть одинаковыми?

Домашнее задание

В пруд пустили 30 щук, которые постепенно поедали друг друга. Щука считается сытой, если она съела не менее трёх щук (сытых или голодных). Какое наибольшее число щук могло побывать сытыми?

Занятие 14

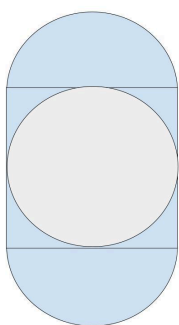
Вместо одной цифры точного куба поставили звёздочку и получили $19*83$. Вместо какой цифры поставили звёздочку?

Некоторое число умножили на 10 и получили простое число. Затем то же самое число умножили на 15, но всё равно получили простое число. Может ли такое быть?

Электронные часы показывают часы и минуты. В какое время суток сумма цифр на часах будет наибольшей? (Например, когда часы показывают 16:15, сумма цифр равна $1+6+1+5=13$).

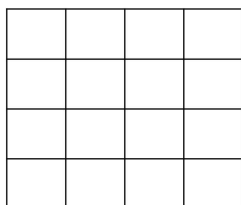
Могут ли сумма и произведение четырёх целых чисел быть нечётными числами?

Некоторые жители острова рыцарей и лжецов заявили, что среди них рыцарей чётное число, а остальные заявили, что лжецов нечётное число. Может ли число жителей острова быть нечётным?



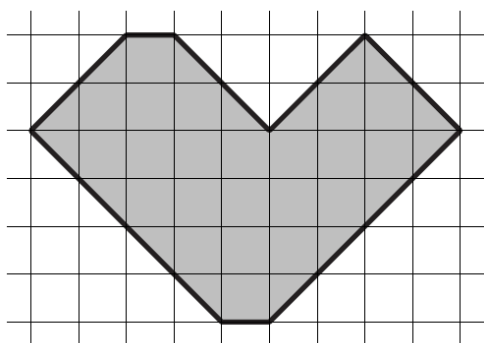
Сторона квадрата равна 1 см. Чему равна площадь синей фигуры?

Закрасьте несколько клеток квадрата 4×4 так, чтобы любая закрашенная клетка имела общую сторону ровно с тремя незакрашенными, а любая незакрашенная — ровно с одной



закрашенной.

Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на три равные части.



Найдите все дроби со знаменателем 16, которые больше $\frac{11}{17}$, но меньше $\frac{12}{17}$.

Найдите все дроби со знаменателем 26, которые больше $\frac{8}{25}$, но меньше $\frac{9}{25}$.

Домашнее задание

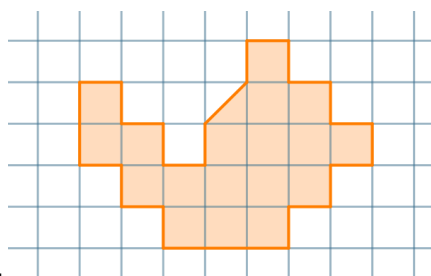
Али-Баба пришёл в пещеру, где есть золото, алмазы и сундук, в котором их можно унести. Полный сундук золота весит 200 кг, полный сундук алмазов – 40 кг, пустой сундук ничего не весит. Килограмм золота стоит на базаре 20 динаров, килограмм алмазов – 60 динаров. Али-Баба может поднять и унести не более 100 кг. Какую наибольшую сумму (денег) он может получить за сокровища, которые он принесёт из пещеры за один раз?

Занятие 15

Может ли натуральное число при делении на 9 давать остаток 5, а при делении на 6 – остаток 4?

Куб сложен из 27 одинаковых кубиков. Сравните площадь поверхности этого куба и площадь поверхности фигуры, которая получится, если из него вынуть все «угловые» кубики.

Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.



Разрежьте фигуру на две равные части.

Найдите все пары натуральных чисел, сумма которых равна 288, а наибольший общий делитель равен 36.

В круге отметили точку. Разрежьте круг на три части и составьте из них новый круг, у которого отмеченная точка будет в центре.

В круге отметили точку. Разрежьте круг на две части и составьте из них новый круг, у которого отмеченная точка будет в центре.

Расположите числа в порядке возрастания:
 0.13 ; $27/200$; 0.125 .

Расположите числа в порядке возрастания:
 $3/4$; $37/50$; 0.7 .

Расположите числа в порядке возрастания:
 $3/7$; $6/13$; 0.4 .

Можно ли полностью оклеить поверхность куба 12 бумажными квадратами, диагональ каждого из которых равна ребру куба?

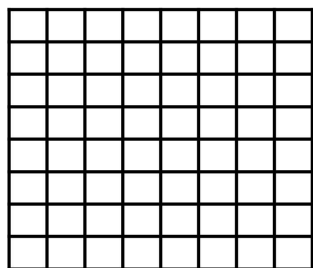
Расположите в порядке убывания положительные числа a , b , c и d , про которые известно, что $a > b + c$, $a + b = c + d$ и $b + d > a + c$.

Докажите, что для натурального n число $n(n+1)$ не может быть квадратом.

Домашнее задание

Можно ли так расставить фишки на клетках шахматной доски 8×8 (в каждой клетке – не более одной фишки), чтобы на любых двух

вертикалях фишек было поровну, а на любых двух горизонталях –



не поровну?

Занятие 16

Докажите, что для натурального n число $n(n+1)$ не может быть квадратом.

На доске написаны числа $1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. За один ход разрешается выбрать два числа и заменить каждое из них на их произведение. Можно ли после нескольких таких операций получить 5 чисел, сумма которых равна $4\frac{1}{4}$?

Есть три кучки одинаковых на вид монет: 17, 21 и 27 штук. Одна монета фальшивая, её вес отличается от веса настоящей. Как за одно взвешивание на весах без гирь с двумя чашками найти одну кучку без фальшивых монет?

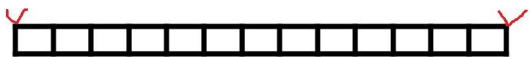
Из спичек составлены три неверных равенства. Переставьте в каждом ряду по одной спичке так, чтобы все равенства стали верными.

$$V = II + VIII;$$

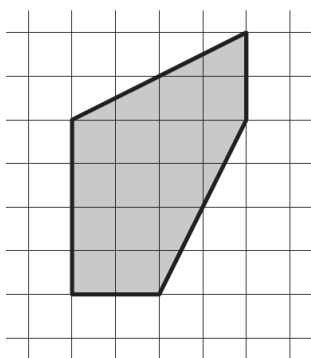
$$VI = II + VIII;$$

$$VII = II + VIII.$$

На прямой отмечены две точки, расстояние между которыми равно 13 см. Отметьте ещё четыре точки так, чтобы среди попарных расстояний между отмеченными точками были все целые значения от 1 до 13 см.

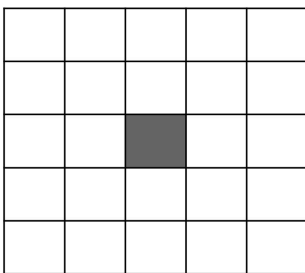


Разрежьте изображённый на рисунке пятиугольник на две равные части.



Домашнее задание

Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку. Разрежьте получившуюся фигуру на две части, в которые можно завернуть куб $2 \times 2 \times 2$.



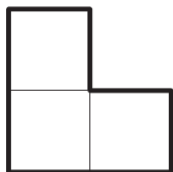
Занятие 17

В некоторой стране из столицы выходит 89 дорог, из города Дальний – одна дорога, из остальных городов – по 20 дорог. Докажите, что из столицы можно проехать в Дальний.

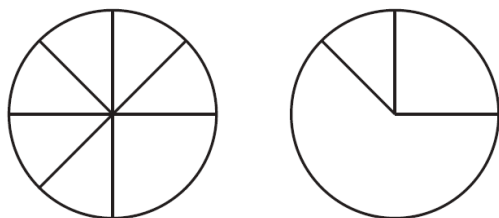
Докажите, что квадрат числа при делении на 3 не может давать в остатке 2.

Докажите, что квадрат числа при делении на 5 не может давать в остатке 2 или 3.

Разрежьте квадрат 6×6 клеточек на трёхклеточные уголки так, чтобы никакие два уголка не образовывали прямоугольник 2×3 .



На вертикальную ось надели несколько колёс со спицами. Вид сверху изображён на рисунке слева. После этого колёса повернули. Новый вид сверху изображён справа. Могло ли колёс быть: а) три; б) два?



Куб $3 \times 3 \times 3$ нетрудно распилить на 27 кубиков $1 \times 1 \times 1$ шестью распилами. Можно ли уменьшить число распилов, если разрешается распиливать несколько кусков сразу и перекладывать части?

В поход пошли 17 туристов. Самому старшему из них 35 лет, а самому младшему 20 лет. Верно ли, что среди туристов есть одногодки?

В классе больше 30, но меньше 40 человек. Каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка – с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

Мудрец пришёл в гости к братьям-близнецам Павлу и Илье, зная, что один из них никогда не говорит правду. Он спросил первого из них: “Ты Павел?” “Да,” - ответил тот. Когда мудрец спросил об этом же второго, то получил столь же чёткий ответ и сразу определил, кто есть кто. Кого звали Павлом?

Домашнее задание

Квадратный лист бумаги разрезали на шесть кусков в форме выпуклых многоугольников. Пять кусков затерялись, остался один кусок в форме правильного восьмиугольника. Можно ли по одному этому восьмиугольнику узнать длину стороны исходного квадрата? А узнать, какими были затерявшиеся 5 кусков?

Занятие 18

Укажите пять натуральных чисел, сумма которых равна 20, а произведение равно 420.

Если зарплату сначала увеличить на 20%, а потом уменьшить на 20%, увеличится она в результате или уменьшится?

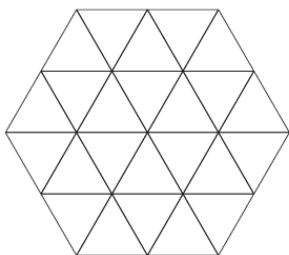
Зарплату сначала уменьшили на $a\%$, а потом увеличили на $b\%$, и в результате она осталась прежней. Докажите, что $b > a$.

Одно положительное число увеличили на 1%, а другое – на 4%. Могла ли их сумма увеличиться на 3%?

Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Разрежьте изображённый на рисунке шестиугольник на четыре равные фигуры. Резать можно только по линиям сетки.



Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?

Паук и муха находятся в противоположных вершинах куба. Сколько всего различных вариантов движения паука к мухе по кратчайшему пути по поверхности куба?

Домашнее задание

Приведите пример десятизначного числа, первая цифра которого - число нулей в этом числе, вторая - число единиц, ..., десятая - девяток.

Занятие 19

Два мальчика, гуляя по парку, набрали на большую круглую поляну, обсаженную деревьями. 1-й пошёл вокруг поляны, считая деревья. 2-й сделал то же самое, но с другого дерева. Дерево, которое у 1-го было 20-м, у 2-го было 7-м, а 7-е дерево 1-го - 94-м. Сколько деревьев росло вокруг поляны?

Может ли в равенстве $1/x = 1/y + 1/z$ одно из чисел x , y или z быть однозначным, другое – двузначным, третье – трёхзначным?

Расставьте в вершинах пятиугольника числа так, чтобы сумма чисел на концах одной стороны была равна 1, на концах другой равна 2, ..., на концах пятой равна 5.

Сумма цифр трёхзначного числа, делящегося на 7, делится на 7. Докажите, что последние две его цифры дают одинаковые остатки при делении на 7.

Сумма цифр трёхзначного числа равна 7. Докажите, что это число делится на 7 тогда и только тогда, когда последние две его цифры одинаковые.

Три школьника живут в одном доме. В школу они идут с постоянными, но различными скоростями, не оглядываясь и не дожидаясь друг друга. Но если кто-то из них успевает догнать другого, то дальше он замедляется, чтобы идти вместе с тем, кого догнал. Однажды они вышли в разное время (Первый, Второй, Третий) и двое из них пришли в школу вместе. На следующий день сначала вышел Третий, затем Второй, а последним Первый. Могут ли все трое прийти в школу вместе?

Можно ли раскрасить грани куба в три цвета так, чтобы каждый цвет присутствовал, но нельзя было увидеть одновременно грани всех трёх цветов, откуда бы мы ни взглянули на куб? (Одновременно можно увидеть только любые три грани, имеющие общую вершину.)

Домашнее задание

Сумма цифр трёхзначного числа, все цифры которого различны, делится на 7, само число также делится на 7. Найдите все такие числа.

Занятие 20

Докажите, что квадрат нечётного числа даёт остаток 1 при делении на 4.

Какие остатки при делении на 4 может давать сумма двух квадратов целых чисел?

Может ли сумма квадратов двух целых чисел быть равной 10003?

Как разложить по семи кошелькам 127 монет в один шекель так, чтобы любую сумму от 1 до 127 шекелей можно было выдать, не открывая кошельков?

Докажите, что $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Докажите, что любое число, которое меньше 2^{n+1} , можно представить в виде

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 4 + a_3 \cdot 8 + a_4 \cdot 16 + \dots + a_n \cdot 2^n,$$

где каждое из чисел a_k равно 0 или 1.

Можно ли одно и то же число представить в таком виде с разными цифрами a_k ?

Три лампочки в углах комнаты не освещали часть комнаты. Две лампочки разбились, оставшуюся перевесили в другой угол, и вся комната оказалась освещена. Могло ли такое быть?

Несколько человек перешли из одной группы в другую. Мог ли при этом средний вес в каждой группе увеличиться?

Домашнее задание

В комнате находятся 12 рыцарей и лжецов. Первый сказал: “Здесь нет ни одного рыцаря”, второй: “Здесь не более одного рыцаря”, третий: “Здесь не более двух рыцарей”, и т.д., 12-й: “Здесь не более 11 рыцарей”. Сколько в комнате рыцарей?

Занятие 21

Загадано целое число, которое не меньше 1 и не больше 1000. Разрешено задавать только такие вопросы, на которые можно ответить «да» или «нет». Можно ли за 10 вопросов определить загаданное число?

Два рыбака поймали 70 рыб, причём $\frac{5}{9}$ улова первого составляли караси, а $\frac{7}{17}$ улова второго – окуни. Сколько рыб поймал каждый из них?

Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей (из этой компании).

Отметим на листе бумаги четыре точки так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой, проведём через каждую пару этих точек прямую и отметим все точки пересечения этих прямых. Может ли при этом получиться:

- а) пять точек;
- б) шесть точек?

Как покрасить часть точек плоскости так, чтобы на каждой окружности радиуса 1 см было ровно четыре покрашенные точки?

Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком, причём Катя выпила четверть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько человек в семье?

Самолёт вылетел из города А в полдень и приземлился в городе В в 14 часов местного времени. В полночь он вылетел обратно и приземлился в городе А, когда там было 6 часов утра. Сколько времени длился каждый полёт?

Домашнее задание

Некое секретное здание состоит из большого числа одинаковых с виду комнат, соединённых коридорами по кругу, в каждой есть люстра и выключатель. Шпион оказался в одной из комнат. Как ему определить количество комнат в здании, если он может ходить по зданию и включать и выключать свет? Изначально где-то свет уже горел, а где-то - нет, но где именно - шпиону заранее неизвестно.

Занятие 22

В классе 25 учеников. Известно, что у любых двух девочек класса количество друзей-мальчиков из этого класса не совпадает. Какое наибольшее количество девочек может быть в этом классе?

Мама положила на стол сливы и сказала детям, чтобы они, вернувшись из школы, разделили их поровну. Первой пришла Аня, взяла треть слив и ушла. Потом вернулся из школы Боря, взял треть

оставшихся слив и ушёл. Затем пришёл Витя и взял 4 сливы – треть от числа слив, которые он увидел. Сколько слив оставила мама?

На двух гранях куба провели диагонали с общей вершиной. Найдите угол между ними.

Какой угол был между часовой и минутной стрелками, если через 20 минут между ними был такой же угол?

Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Найдите два двузначных простых числа, которые получаются друг из друга перестановкой цифр и разность которых – полный квадрат.

Можно ли замостить шахматную доску костями домино так, чтобы не образовалось квадратов из двух костей?

Домашнее задание

Можно ли соединить 3 резиновых кольца так, чтобы их нельзя было расцепить, но при разрезании любого из них они расцеплялись бы? А можно ли так соединить 5 резиновых колец?

Занятие 23

Сколькими способами можно разложить 4 разных предмета по двум разным коробкам, положив в каждую по два предмета?

Числа m и n целые. Может ли число $mn(m+n)$ быть нечётным?

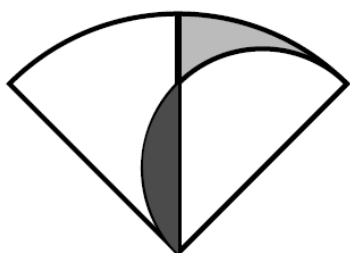
Замените звёздочки в записи числа $72*3*$ цифрами так, чтобы это число делилось на 45.

Одна сторона прямоугольной плитки белая, а другая (на которой она лежит) чёрная. Плитку перекашивают по столу, переворачивая через какие-то стороны. После нескольких переворачиваний плитка

вернулась на место. Могла ли она перевернуться (могла ли верхняя сторона стать чёрной)?

Вершины прямоугольной плитки помечены буквами. Плитку перекатывают по столу, переворачивая через какие-то стороны. После нескольких переворачиваний плитка вернулась на место. Могли ли какие-то вершины поменяться местами?

Четверть круга разделили радиусом на две равные части и нарисовали в ней маленький полукруг. Докажите, что площади закрашенных фигур равны.



Докажите, что произведение шести последовательных натуральных чисел делится на 9.

Двое гуляющих одновременно пошли навстречу друг другу из противоположных концов дорожки. После встречи первый дошёл до конца дорожки через 4 мин, а второй через 1 мин. Через сколько минут после начала прогулки они встретились?

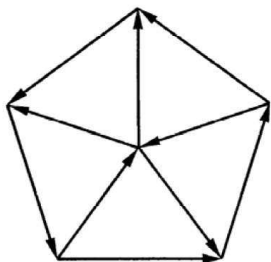
Мама разделила яблоки между тремя сыновьями. Первому она дала половину всех яблок и ещё половину яблока, второму – половину остатка и ещё половину яблока, третьему – половину нового остатка и оставшуюся половину яблока. Сколько яблок получил каждый из сыновей?

Сколько существует девятизначных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая меньше предыдущей)?

Докажите, что квадрат нечётного числа даёт остаток 1 при делении на 8.

Домашнее задание

По 10 дорожкам бегают спортсмены. Направления их движения указаны на рисунке стрелками. Каждую из дорожек каждый спортсмен пробегает за 1 мин, причём по первой дорожке каждую минуту пробегает один спортсмен, по второй - 2, по третьей - 3 и т.д., по десятой - 10 спортсменов. Расставьте на рисунке номера дорожек.



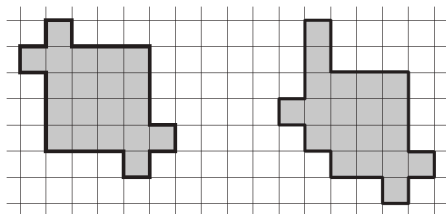
Занятие 24

Сколькими способами можно разложить три одинаковые монеты по двум карманам?

Сколькими способами можно разложить три разные монеты по двум карманам?

Как с помощью двух сосудов вместимостью 3 л и 7 л налить из водопроводного крана в кастрюлю 5 л воды?

Разрежьте по линиям сетки на две равные части фигуру, изображённую на рисунке слева, и сложите из них фигуру, изображённую справа.



Найдите остаток от деления произведения двух последовательных чисел на следующее за ними число.

Среди ста рыцарей и лжецов проводили опрос: “Кого среди остальных 99 человек больше - рыцарей или лжецов?” Когда опросили 51 участника и все ответили, что лжецов больше, опрос прервали. Сколько всего было рыцарей?

Арбуз разрезали на части и съели. Могло ли получиться корок больше, чем частей?

Есть три кучки камней: в первой 10, во второй 15, в третьей 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие части; проигрывает тот, кто не сможет сделать хода. Кто выигрывает: первый или второй?

На окружности расположены точки: 1001 белая и одна красная. Рассмотрим всевозможные многоугольники с вершинами в этих точках. Каких среди них больше: с красной вершиной или без неё?

Домашнее задание

Одна сторона треугольной плитки белая, а другая (на которой она лежит) чёрная. Плитку перекашивают по столу, переворачивая через какие-то стороны. После нескольких переворачиваний плитка вернулась на место. Могла ли она перевернуться (могла ли верхняя сторона стать чёрной)? Выясните это для треугольников со следующими углами: а) 60° , 60° , 60° ; б) 45° , 45° , 90° ; в) 30° , 60° , 90° ; г) 30° , 30° , 120° .

Занятие 25

Предложите набор из трёх гирь, с помощью которых можно взвесить любой груз в целое число граммов от 1 до 13 при условии, что гири можно класть на обе чашки весов.

Запишите число 61 в троичной системе счисления.

Имеются весы с двумя чашками и по одной гире в 1 г, 3 г, 9 г, 27 г и 81 г. Как уравновесить груз в 61 г, положенный на чашку весов?

У человека есть 10 друзей. В течение нескольких дней он приглашает некоторых из них в гости так, что компания ни разу не повторяется (в какой-то из дней он может не приглашать никого). Сколько дней можно так делать?

Как с помощью двух сосудов вместимостью 3 л и 5 л налить из водопроводного крана в один из сосудов 4 л воды?

Сколько различных четырёхзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4, если:

- а) каждая цифра может встречаться только один раз;
- б) каждая цифра может встречаться несколько раз?

Три рыцаря и три их оруженосца должны переправиться через реку на двухместной лодке. Оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев. Как им переправиться?

Среди трёх монет есть одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящей. За два взвешивания найдите фальшивую монету и выясните, тяжелее она или легче настоящей.

Домашнее задание

Если к числу 20 прибавим 16, то получим 36 – полный квадрат. Если вычтем из него 16, то получим 4 – тоже полный квадрат. Существуют ли ещё целые числа, которые становятся квадратами как после прибавления к ним 16, так и после вычитания из них 16? Сколько их?

Занятие 26

Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 19.

На острове рыцарей и лжецов пяти жителям выдали разные номера от 1 до 10. На вопрос «Делится ли ваше число на 2?» все ответили утвердительно. На вопрос «Делится ли ваше число на 5?» все

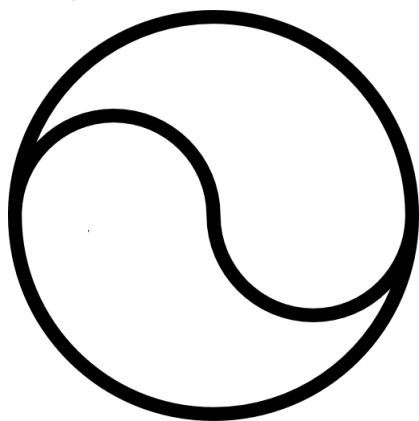
ответили отрицательно. Сколько было лжецов и какие у них были номера?

На острове рыцарей и лжецов четырём жителям выдали разные номера от 1 до 10. На вопрос «Делится ли ваше число на 4?» все ответили отрицательно. На вопрос «Делится ли ваше число на 5?» все ответили утвердительно. Сколько было лжецов и какие у них были номера?

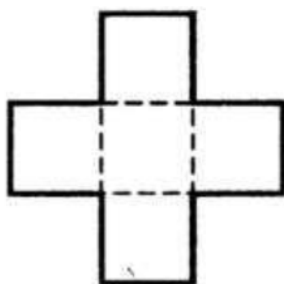
Может ли квадрат натурального числа оканчиваться на две нечётные цифры?

Кузнечик прыгает по прямой. В первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз – на 2 см и т. д. Докажите, что после 25 прыжков он не может оказаться там, где начинал.

Разделите две фигуры одним прямолинейным разрезом на 4 фигуры равной площади.



Имеется кубик и шесть одинаковых крестообразных фигур, вырезанных из бумаги. Площадь каждой бумажной фигуры равна площади одной грани кубика. Можно ли этими кусками бумаги целиком оклеить кубик?



Докажите, что одно из 18 последовательных чисел делится на 18.

Домашнее задание

Наименьшее общее кратное (НОК) чисел - это наименьшее число, которое делится на каждое из этих чисел. Укажите шесть последовательных чисел, у которых НОК трёх первых больше, чем НОК трёх последних?

Занятие 27

Докажите, что хотя бы одно из 18 последовательных трёхзначных чисел делится на сумму своих цифр.

Собрались три попугая - Гоша, Кеша и Рома. Один из них всегда говорит правду, другой всегда лжет, а третий хитрец, он иногда говорит правду, иногда лжет. На вопрос: <<Кто Кеша?>> - попугаи ответили так:

Гоша: - Кеша лжец.

Кеша: - Я хитрец!

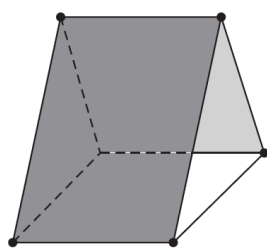
Рома: - Он абсолютно честный попугай.

Кто же из попугаев честный, кто лжец, а кто хитрец?

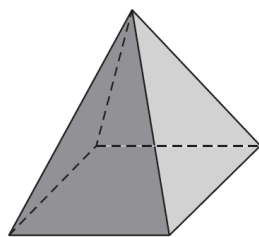
Найдите все несократимые дроби, увеличивающиеся вдвое после увеличения и числителя, и знаменателя на 10.

За два года завод снизил объём выпускаемой продукции на 51%, причём каждый год объём снижался на одно и то же число процентов. На сколько?

Есть две крыши одинаковой высоты с одинаковыми квадратными основаниями: двускатная (рисунок а) и четырёхскатная (рисунок б). У какой из них больше площадь?



а)



б)

Три дачника пользуются одной лодкой. Они привязывают её цепью, которую замыкают тремя разными замками. Это позволяет каждому дачнику, имея ключ только от одного замка, в любой момент отвязать лодку и поехать кататься, не дожидаясь своих товарищей. Как дачники замыкают лодку?

Чего больше: способов выбрать 5 предметов из 12 или способов выбрать 7 предметов из 12?

Домашнее задание

Можно ли на плоскости нарисовать 12 окружностей так, чтобы каждая касалась ровно пяти других?

Занятие 28

У аптекаря есть три гири, с помощью которых можно отвесить 100 г, 101 г и 102 г. (Гирьки он ставит на одну чашу весов, а товар – на другую.) Могло ли быть так, что каждая гирька легче 90 г?

Докажите, что пример с гирьками единственный.

Докажите, что квадрат числа, оканчивающегося на 5, оканчивается на 25.

Неравноплечные аптечные весы с двумя чашками увеличивают вес на одной чашке относительно другой в одно и то же число раз (равное отношению длин плеч весов). При взвешивании пузырька на одной чашке его вес оказался равным 50 г, а при взвешивании на другой чашке – 32 г. Сколько весит этот пузырёк на самом деле?

На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса?

Комплект костей домино выложен в виде прямоугольника 8×7 клеток. Как расположены кости?

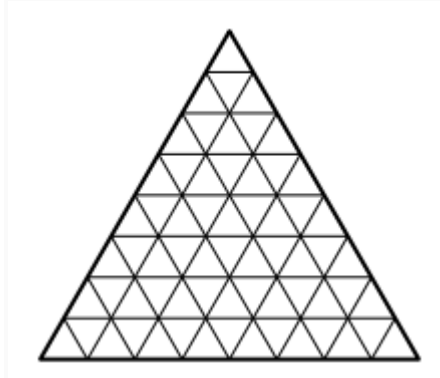
6	6	3	5	2	5	3	5
2	2	2	4	0	6	1	1
4	4	4	0	3	4	1	1
1	0	0	3	1	6	4	5
0	3	3	2	2	0	5	3
6	3	6	1	2	0	5	5
6	6	2	4	4	5	0	1

Домашнее задание

Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 56, делится на 56 и имеет сумму цифр, равную 56.

Занятие 29

Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольники со стороной 1. Какое наименьшее количество треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольника?



а) Укажите такие три правильные несократимые дроби, что их сумма – целое число и если каждую из этих дробей «перевернуть» (т. е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей тоже будет целым числом.

б) То же, но числители дробей – не равные друг другу натуральные числа.

В строку записано несколько чисел так, что сумма любых трёх последовательных чисел положительна. Можно ли утверждать, что сумма всех чисел положительна, если чисел: а) 18; б) 19; в) 20?

Решите в натуральных числах уравнение

$$3x^2 + 5y^2 = 345.$$

Домашнее задание

На Марсе имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 марсианских талеров (других монет нет). Марсианин отдал за покупку несколько монет и получил сдачу – на одну монету больше. Какова наименьшая возможная цена покупки?

Занятие 30

Разность двух нечётных чисел равна 8. Докажите, что эти числа взаимно простые.

Разность двух нечётных чисел делится на 8. Обязательно ли эти числа взаимно простые?

Сколько клеточек пересекает диагональ прямоугольника со сторонами 13 и 17 на клетчатой бумаге?

Расставьте по кругу шесть различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних.

В коробке лежали спички. Их количество удвоили, а затем убрали 8 спичек. Остаток спичек снова удвоили, а затем снова отняли 8 спичек. Когда эту операцию проделали в третий раз, в коробке не осталось ни одной спички. Сколько их было сначала?

Могут ли семь прямых пересекаться ровно в девяти точках?

а) Покажите, что среди любых шести целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

б) Останется ли это утверждение верным, если вместо разности взять сумму?

Домашнее задание

Разместите 28 костей домино 1×2 в коробке 8×8 так, чтобы ни одну из костей нельзя было сдвинуть в плоскости дна коробки.

Занятие 31

Если велосипедист будет ехать со скоростью 10 км/ч, то он опоздает на один час, а если со скоростью 15 км/ч, то приедет на час раньше. С какой скоростью он должен ехать, чтобы приехать вовремя?

Числитель и знаменатель дроби — натуральные числа, дающие в сумме 101. Известно, что дробь не превосходит $\frac{1}{3}$. Укажите наибольшее возможное значение такой дроби.

На сколько частей делят плоскость 10 прямых, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке?

На складе имеется по 200 ботинок 41-го, 42-го и 43-го размеров, причём среди этих 600 ботинок 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

В куб с ребром 4 см поместили шар радиусом 2 см и заполнили свободное пространство водой. В другой такой же куб поместили 8 шаров радиусом 1 см и тоже заполнили водой. В каком случае потребовалось больше воды?

Разрежьте фигуру на рисунке на 8 одинаковых частей.



Вычеркните из числа 1234512345123451234512345 десять цифр так, чтобы осталось наибольшее возможное число.

По кругу расставлено девять чисел – четыре единицы и пять нулей. Каждую секунду над числами проделывают следующую операцию: между соседними числами ставят ноль, если они различны, и единицу, если они равны; после этого старые числа стирают. Могут ли через некоторое время все числа стать одинаковыми?

Как с помощью двух сосудов вместимостью 4 л и 9 л налить из водопроводного крана в один из сосудов 6 л воды?

Домашнее задание

Приведите пример двух разных десятизначных чисел, каждое из которых описывает число цифр другого, т.е. первая цифра одного числа равна числу нулей другого, вторая цифра - числу единиц и т.д.

Занятие 32

Найдите все пары целых чисел n и m , для которых выполняется равенство $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1$.

Упаковки по 10 кг и по 17 кг весят 223 кг. Сколько всего упаковок?

Из бумаги склеили правильный тетраэдр. Можно ли его разрезать так, чтобы получилось цилиндрическое кольцо?

Существуют ли такие натуральные числа m и n , что три дроби $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$ и $\frac{m+1}{n+1}$ несократимые?

Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из этих чисел делится на 5.

Дано 25 чисел. Какие бы три из них мы ни выбрали, среди оставшихся найдётся такое четвёртое, что сумма этих четырёх чисел будет положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?

Домашнее задание

Существуют ли 100 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

Занятие 33

Покажите, что $\frac{1}{9} = 0.(1)$, $\frac{1}{99} = 0.(01)$, $\frac{1}{999} = 0.(001)$ и т. д.

Представьте обыкновенную дробь $\frac{1}{37}$ в виде периодической бесконечной дроби.

Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа А равна 8. На сколько нулей оканчивается число А?

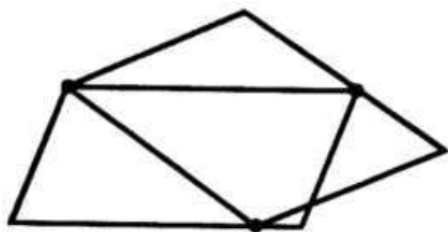
Можно ли расположить на плоскости девять прямых так, чтобы каждая из них пересекала ровно шесть других?

Докажите, что если к трёхзначному числу приписать трёхзначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится число, делящееся на 11.

Два грузовика выехали из пунктов А и В навстречу друг другу, доехали до противоположных пунктов и поехали обратно. Первый раз они встретились на расстоянии 60 км от А, второй – на расстоянии 80 км от В. Найдите расстояние от А до В.

Домашнее задание

Два параллелограмма расположены так, как показано на рисунке: они имеют общую вершину и ещё по одной вершине у каждого из параллелограммов лежит на сторонах другого параллелограмма. Докажите, что площади параллелограммов равны.



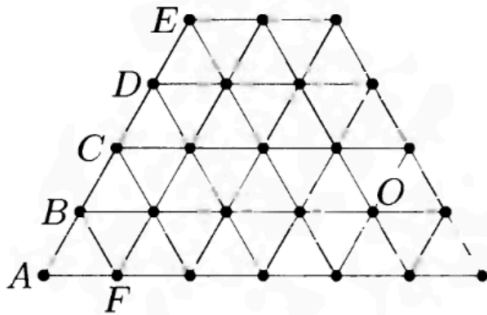
Занятие 34

Можно ли расположить на плоскости несколько одинаковых кругов так, чтобы каждый касался ровно трёх других?

Представьте обыкновенную дробь $\frac{1}{7}$ в виде периодической бесконечной дроби.

Представьте следующие обыкновенные дроби в виде периодических бесконечных дробей: $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7}$. Видите ли вы какую-то закономерность?

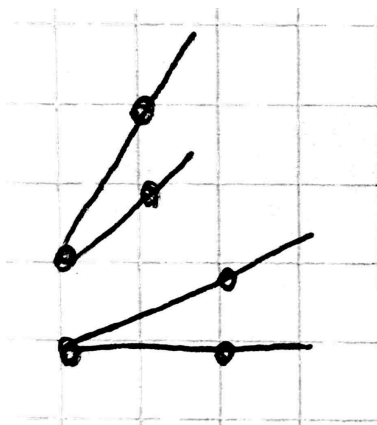
Представьте обыкновенную дробь $\frac{1}{14}$ в виде периодической бесконечной дроби. Как это представление связано с аналогичным представлением дроби $\frac{5}{7}$?



Сетка сделана из шнура, который может гореть. Огонь распространяется по шнуру с одной и той же скоростью по всем направлениям (звено сгорает за 1 мин). Какие из отмеченных буквами звеньев сетки сгорят последними, если поджечь сетку в точке O ? Через какое время это произойдет?

Каждый из детей съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

Найдите сумму величин углов на рисунке.



За круглым столом сидело несколько человек и перед ними стояли таблички с их именами. Затем таблички как-то переставили и каждый пошёл к своей табличке по часовой стрелке. Докажите, что общий пройденный ими путь равен целому числу полных оборотов вокруг стола.

По кольцевой линии метро курсируют 24 поезда. Они идут в одном направлении и с одинаковыми интервалами. Сколько поездов нужно

добавить, чтобы при той же скорости уменьшить интервалы на одну пятую часть?

Домашнее задание

Шестиклассники построены в шеренгу, а перед ними стоит шеренга пятиклассников, причём каждый пятиклассник ниже ростом стоящего за ним шестиклассника. Покажите, что если шеренги пятиклассников и шестиклассников построить по росту, то по-прежнему каждый пятиклассник будет ниже стоящего за ним шестиклассника.

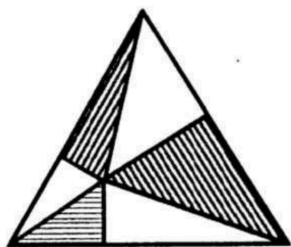
Занятие 35

С полным баком катер может проплыть 72 км против течения или 120 км по течению. На какое наибольшее расстояние он может отплыть по реке при условии, что топлива должно хватить на обратный путь?

Решите в натуральных числах уравнение

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

Точка, взятая внутри равностороннего треугольника, соединена со всеми вершинами. Кроме того, из неё проведены перпендикуляры ко всем сторонам треугольника. Три из образовавшихся шести треугольников заштрихованы через один. Докажите, что сумма площадей заштрихованных треугольников равна сумме площадей незаштрихованных.



НОК двух чисел, не делящихся друг на друга, равно 630, а их НОД равен 18. Найдите эти числа.

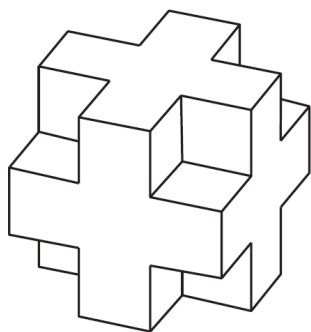
Представьте в виде обыкновенных дробей периодические

бесконечные дроби $0,0(3)$ и $0,00(3)$.

Представьте числа $0.(13)$ и $0.(238)$ в виде обыкновенных дробей.

Представьте в виде обыкновенной дроби и в виде периодической бесконечной дроби число $1-0.(85)$.

Из кубика $3 \times 3 \times 3$ удалили центральный кубик и восемь угловых кубиков. Можно ли оставшуюся фигуру из 18 кубиков составить из шести брусков размером $3 \times 1 \times 1$?



Домашнее задание

Найдите наименьшее значение выражения $|36^k - 5^l|$, где k и l – натуральные числа.

Занятие 36

Представьте следующие числа в виде периодических бесконечных дробей: а) $0,(3) \cdot 0,(4)$; б) $0,(12) + 0,(122)$.

Алиquotная дробь – это дробь вида $\frac{1}{n}$ ($n > 1$ – натуральное число).

Представьте $\frac{1}{2}$ в виде суммы двух различных алиquotных дробей.

Представьте $\frac{3}{4}$ в виде суммы двух алиquotных дробей.

Разделите поровну три яблока между четырьмя людьми, разрезав только одно яблоко на 4 части, а каждое из двух других – на меньшее число частей.

Представьте $\frac{7}{8}$ в виде суммы трёх аликвотных дробей.

Разделите поровну 7 яблок между восемью людьми, разрезав только одно яблоко на 8 частей, а каждое из остальных – на меньшее число частей.

Через точку на диагонали AC параллелограмма ABCD проведены прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разрезают параллелограмм на 4 параллелограмма. Докажите, что площади параллелограммов с вершинами B и D равны.

Можно ли поставить на плоскости 8 точек (сначала первую, потом вторую и так далее до восьмой) так, чтобы никакие три точки не лежали на одной прямой и чтобы в любой момент фигура, состоящая из уже поставленных точек, имела ось симметрии?

Витю каждый день из школы забирает на машине папа. Он выезжает из дома, подъезжает к школе точно в момент окончания уроков, и немедленно едет обратно с Витей той же дорогой. Однажды у Вити уроки закончились на час раньше, и он пошел пешком навстречу машине. Как только он ее встретил, сразу сел в нее, она развернулась и приехала домой на 10 минут раньше, чем обычно. Скорости машины и Вити постоянны. Во сколько раз быстрее едет машина, чем идет Витя?

Домашнее задание

На доске написаны числа 2, 3, 4, ..., 29, 30. За шекель можно отметить любое число. Если какое-то число уже отмечено, можно бесплатно отмечать его делители и числа, которые на него делятся. За какое наименьшее число шекелей можно отметить все числа на доске?

Занятие 37

Один бегун пробегает круг за 5 мин, а другой – за 3 мин. Через сколько минут они встречаются друг с другом, бегая по кругу:

а) в разных направлениях; б) в одном направлении?

Сколько карандашей надо взять в темноте из коробки с семью красными и пятью синими карандашами, чтобы было взято не менее двух красных карандашей и не менее трёх синих?

Вдоль улицы висят красные и синие лампочки. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в этой гирлянде, если всего лампочек 50?

Два человека спускаются по идущему вниз эскалатору и считают ступени, на которые они спустились. Один спускается быстрее. Кто насчитает больше ступеней?

Диагонали делят трапецию на 4 треугольника. Докажите, что площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам, равны.

Найдите все прямоугольники с натуральными сторонами, у которых значение периметра равно значению площади.

Какой может быть последняя цифра квадрата, если предпоследняя цифра - нечётное число?