

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ
ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Αν

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ,
- να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το

πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a,b) , παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (a,b)$ καμπή, τότε $f''(x_0) = 0$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, ισχύει ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$

και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right)^2, \quad x < 0.$$

Μονάδες 9

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f^{-1}$ είναι $h(x) = \frac{x-1}{x}, \quad x < 0.$

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h του ερωτήματος B2.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ell n x}{x}$

Γ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Γ2. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Γ4. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του k .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = e^x \text{ και } g(x) = -x^2 - x.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο $M(-1,0)$ είναι η ευθεία $\varepsilon : y = x + 1$.

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ1 εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Μονάδες 9

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7