

5.6. Квантовая механика*

(за пределами школьной программы)

1. Волновые свойства электрона

В классической механике для описания движения частиц используют понятия: материальная точка, ее координаты, траектория, скорость, ускорение и т.д. Но при переходе к масштабам атома выяснилось, что в рамках данных понятий описать поведение микрочастицы (электрона) невозможно

- неделимая микрочастица может находиться одновременно в разных местах (в опыте Юнга электрон одновременно проходит через две щели);
- при регистрации электрона в одном месте он мгновенно исчезает из всех остальных мест;
- в атоме на стационарной орбите электрон движется (имеет импульс) и в то же время покоится (заряд по орбите не движется, так как электрон не излучает);
- при излучении или поглощении кванта света электрон в атоме исчезает с одной орбиты и появляется на другой, не проходя через промежуточные состояния.

То есть, основные понятия кинематики, такие как координаты и скорости частицы, потеряли смысл. Потеряли смысл и законы динамики, так как они базируются на понятиях кинематики. Следовательно, **классическая механика в микромире не работает**. Для описания процессов в микромире была создана **квантовая механика**.

Существует несколько интерпретаций квантовой механики, отличающихся друг от друга математическим аппаратом и системой понятий. Наибольшее распространение получила **копенгагенская интерпретация** квантовой механики, которая основана на идее Луи де Бройля, что движению каждой частицы соответствует распространение некоторой волны. Частота ν и длина λ волны определяются кинетической энергией E_k и импульсом P частицы ($h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка)

$$\nu = \frac{E_k}{h} \qquad \lambda = \frac{h}{P}$$

Микрочастицы, имеющие волновые свойства, называют **квантовыми объектами**. А способность квантовых объектов в одних условиях проявлять свойства частицы, а в других - волны, называют **корпускулярно-волновым дуализмом**.

Волновые свойства частиц описывает уравнение Шрёдингера. Это дифференциальное уравнение 2-го порядка в частных производных. Решением уравнения Шрёдингера является **волновая функция**. Она описывает волны вероятности, которые распространяются в пространстве так же, как и волны в классической механике. Но амплитуды волн вероятности - это комплексные числа, поэтому волновая функция не является наблюдаемой величиной, ей не соответствует никакой физический объект. Физический смысл имеет только квадрат модуля волновой функции, он равен **плотности вероятности** обнаружения частицы в данном месте пространства.

Плотность вероятности обнаружения частицы не равна нулю в достаточно большом объеме пространства, поэтому точные координаты частицы указать невозможно. При измерении частица обнаруживается в одном случайном месте, но при многократном повторении опыта частота обнаружения частицы в данном месте пространства соответствует вероятности, предсказанной волновой функцией.

Для измеряемых физических величин, например, энергии или импульса частицы, ситуация аналогичная. Волновая функция описывает квантовую систему как суперпозицию всех возможных состояний. При измерении случайным образом реализуется одно из возможных значений физической величины в результате взаимодействия квантовой системы с измерительным прибором.

То есть, конкретное значение физической величины до ее измерения указать невозможно, а все предсказания в квантовой механике носят вероятностный характер. При многократных измерениях в одинаковых условиях у результатов измерения будет неизбежный разброс – неопределенность данной физической величины.

2. Волновая функция

Математика квантовой механики далеко выходит за пределы школьной программы, но в некоторых случаях волновые свойства электрона можно описать, используя только школьные понятия.

Пусть нерелятивистский электрон движется в свободном пространстве по оси x . Если электрон считать бегущей волной, то волновую функцию в простейшем случае можно записать как уравнение монохроматической волны

$$\Psi(x, t) = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Циклическую частоту ω и волновое число k найдем из формул де Бройля

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{E_x}{\hbar} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{P}{\hbar}$$

Здесь и далее используется приведенная постоянная Планка

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

У свободного нерелятивистского электрона кинетическая энергия равна

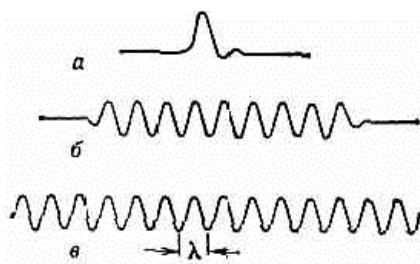
$$E = \frac{mV^2}{2} = \frac{P^2}{2m}$$

Тогда волновое число и длину волны электрона можно выразить через его кинетическую энергию

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}}$$

Например, при энергии электрона $E = 10 \text{ эВ}$ его скорость равна $V = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$, а длина волны $\lambda = 4 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 4 \text{ \AA}$. Такую длину волны можно измерить при дифракции потока электронов на кристаллической решетке. Результаты опытов Дэвиссона и Джермера по дифракции электронов на монокристалле никеля подтвердили наличие волновых свойств у электрона, а измеренные длины волн совпали с теоретическими.

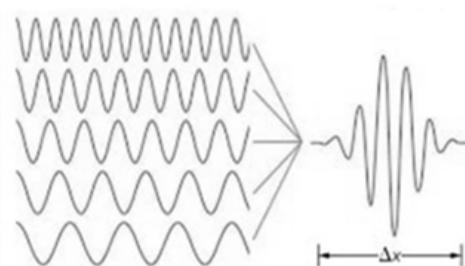
Что касается положения электрона как частицы, то о нем ничего сказать нельзя, так как монохроматическая волна (в) заполняет все пространство. Но тогда свободно движущийся электрон можно рассматривать как одиночную волну (а) или волновой пакет (б).



а - одиночная волна;

б - волновой пакет;

в - бегущая монохроматическая волна



Волновой пакет (и одиночную волну) математически можно представить как результат сложения большого числа монохроматических волн с мало различающимися волновыми числами. Причем, длина волнового пакета Δx связана с диапазоном волновых чисел Δk приближенным равенством

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$$

Используя связь волнового числа с импульсом, это равенство можно записать в виде

$$\Delta x \cdot \Delta P \approx \hbar$$

То есть, и координата, и импульс волнового пакета не имеют точных значений. Они находятся в некотором диапазоне, размер которой называют областью **неопределенности**.

Отсюда следует, что свободно движущийся электрон можно рассматривать и как волновой пакет, и как обычную **классическую частицу**, но имеющую некоторые неопределенности координаты и импульса. Следует отметить, что эти неопределенности устранить нельзя, так как они связаны с волновыми свойствами самого электрона.

3. Соотношение неопределенностей

Для среднеквадратичных погрешностей координаты и импульса частицы **соотношение неопределенностей** Гейзенберга имеет вид

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Соотношение неопределенностей позволяет оценивать порядок величины импульса и энергии частицы по размеру области ее обнаружения. При таких оценках численные коэффициенты порядка единицы обычно не учитывают.

Можно считать, что неопределенность координаты частицы равна примерно половине размера области, в которой она заключена $\Delta x \approx r$, а неопределенность импульса равна половине импульса $\Delta P \approx P/2$. Тогда соотношение неопределенности можно записать в виде приближенного равенства

$$r \cdot P \approx \hbar$$

Отсюда следует, что частица в замкнутой области имеет импульс квантовомеханической природы (**импульс Ферми**)

$$P_F \approx \frac{\hbar}{r}$$

Нерелятивистская частица с таким импульсом имеет кинетическую энергию (**энергию Ферми**)

$$E_F = \frac{P_F^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2}$$

Из соотношения неопределенностей следует, что в замкнутом объеме частица **не может покоиться**, так как неопределенность ее координаты превысит размеры данной области и частица может оказаться за пределами данного объема. Частица **не может иметь точные координаты**, так как неопределенность ее импульса, а значит, и величина импульса будут бесконечны.

Если частица не может иметь точных значений координат и импульсов, то **траектории движения частицы не существует**. Поэтому кинематическое описание движения отдельной частицы становится невозможным. В квантовой механике мы не можем предсказать движение ни одной микрочастицы, но физические свойства тел, состоящих из большого числа микрочастиц, квантовая механика описывает с очень высокой точностью, недостижимой для классической механики.

4. Атом водорода

Механическая энергия электрона в замкнутом объеме атома складывается из кинетической энергии (энергии Ферми) и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r}$$

где: $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$ – постоянная закона Кулона;

$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ – элементарный заряд;

График функции $E(1/r)$ представляет собой параболу, с ветвями, направленными вверх. Минимум функции можно найти, выделив полный квадрат

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{kme^2}{\hbar^2} \right)^2 - \frac{k^2 me^4}{2\hbar^2}$$

Тогда минимальная энергия электрона в основном состоянии атома будет равна

$$E_1 = -\frac{k^2 me^4}{2\hbar^2} = -13,6 \text{ эВ}$$

при радиусе атома (Боровском радиусе)

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

То есть, электрон, находясь в основном состоянии, самопроизвольно не может ни приблизиться к ядру, ни удалиться от ядра. Для этого ему нужна дополнительная энергии.

5. Вырожденный газ

При низкой концентрации частиц используют модель **идеального газа**, в которой частицы хаотически движутся и не взаимодействуют друг с другом. **Температуру** определяют как меру средней кинетической энергии поступательного движения частиц. **Газокинетическое давление** создается частицами при их ударах о стенки замкнутого объема

$$\bar{E} = \frac{3}{2} \cdot kT \quad p = \frac{2}{3} \cdot n\bar{E} = nkT$$

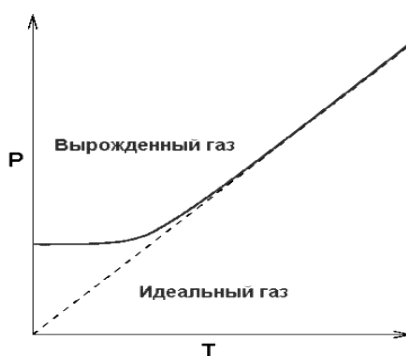
где: $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана;

T – абсолютная температура;

n – концентрация частиц (число частиц в единице объема).

При высокой концентрации частиц становится существенным **квантово-механическое давление**, связанное с взаимодействием частиц. При этом, кинетической энергией частиц является энергия Ферми

$$E_F \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2} \approx \frac{\hbar^2}{m} \cdot n^{2/3} \quad p_F \approx \frac{2}{3} \cdot nE_F \approx \frac{\hbar^2}{m} \cdot n^{5/3}$$



С понижением температуры газокинетическое давление уменьшается, а квантово-механического давления от температуры не зависит, оно не равно нулю даже при абсолютном нуле температуры.

Газ, у которого энергия Ферми во много раз больше средней кинетической энергии теплового движения, называют **вырожденным газом**. У вырожденного газа газокинетическим давлением можно пренебречь.

6. Равновесие звезд

1) Горящая звезда

При оценках по порядку величины можно считать, что в звезде радиуса R и массы M две половинки звезды притягиваются силой

$$F = G \cdot \frac{M^2}{R^2}$$

где: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ – гравитационная постоянная;

Эта сила на площадь сечения звезды $S \approx R^2$ создает **давление гравитационного сжатия**

$$p_G = G \cdot \frac{M^2}{R^4}$$

Для Солнца $M \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$, $R \approx 0,7 \cdot 10^9 \text{ м}$, тогда давление гравитационного сжатия $p_G \approx 10^{15} \text{ Па}$.

Горячая звезда типа Солнца состоит, в основном, из ионизированного водорода (протонов и электронов). Концентрацию протонов можно оценить по формуле

$$n = \frac{M^2}{m_p R^3}$$

где: $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ – масса протона;

Газокинетическое давление можно оценить по уравнению состояния газа

$$p \approx nkT \approx \frac{M^2}{m_p R^3} \cdot kT$$

При температуре в центре Солнца $T = 15 \text{ млн. К}$ величина газокинетического давления равна $p \approx 10^{15} \text{ Па}$. То есть, газокинетическое давление горячей плазмы уравнивает давление гравитационного сжатия.

2) Белый карлик

В звезде с массой, близкой к массе Солнца, термоядерные реакции прекращаются после горения водорода и гелия. В это время звезда представляет собой горячую смесь электронов и ядер легких элементов (до углерода или кислорода). Такую звезду называют **белый карлик**. Гравитационное сжатие «горячего» белого карлика уравнивает газокинетическое давление высокотемпературной плазмы.

При остывании белого карлика газокинетическое давление уменьшается, и он сжимается гравитационными силами до радиуса $R \approx 5 \cdot 10^6 \text{ м}$, близкого к радиусу Земли. «Холодный» белый карлик солнечной массы с таким радиусом создает давление гравитационного сжатия $P_G \approx 10^{23} \text{ Па}$.

Концентрация электронов в таком белом карлике равна концентрации протонов

$$n = \frac{M}{2m_p R^3} \approx 5 \cdot 10^{36} \text{ м}^{-3}$$

Тогда квантово-механическое давление вырожденного газа электронов равно давлению гравитационного сжатия

$$p_e = \frac{\hbar^2}{m_e} \cdot n^{2/3} \approx 10^{23} \text{ Па}$$

где: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ – масса протона;

То есть, дальнейшее сжатие белого карлика останавливает **квантово-механическое давление вырожденного газа электронов**. Это справедливо, если масса белого карлика не превышает 1,4 массы Солнца (предел Чандрасекара),

3) Нейтронная звезда

В звездах с массой, в несколько раз больше массы Солнца, термоядерные реакции продолжают до образования железа. После прекращения термоядерных реакций при гравитационном сжатии звезды электроны вдавливаются в ядра, где они соединяются с протонами, образуя нейтроны. При этом число электронов уменьшается, а их давление падает. Тогда гравитационные силы сжимают звезду до радиуса (10 - 15) км и образуется **нейтронная звезда**.

Горячие нейтронные звезды от гравитационного сжатия удерживаются газокинетическим давлением нейтронов, а после охлаждения звезды – **квантово-механическим давлением вырожденного газа нейтронов**. Для «холодной» нейтронной звезды солнечной массы оценки давления гравитационного сжатия и квантово-механического давления вырожденного газа нейтронов дают равные величины

$$P_G \approx P_n \approx 10^{34} \text{ Па.}$$

Если масса нейтронной звезды превышает три массы Солнца (предел Оппенгеймера-Волкова) то нейтроны в ней становятся релятивистскими и уже не могут противостоять гравитационному сжатию. Такая звезда сжимается в точку и образуется **черная дыра** звездной массы.

7. Область высоких энергий

В специальной теории относительности полную энергию частицы рассчитывают по формуле

$$E^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4$$

При ультрарелятивистских энергиях $E \gg mc^2$ энергией покоя частицы можно пренебречь. Тогда связь полной энергии с импульсом становится такой же, как и у безмассовых частиц (фотонов)

$$E = P \cdot c$$

Эту область энергий называют **областью высоких энергий**.

Из записи соотношения неопределенностей Гейзенберга в виде приближенного равенства $r \cdot P \approx \hbar$ следует формула **ультрарелятивистской энергии Ферми**

$$E_F \approx \frac{\hbar c}{r}$$

При измерении длины в метрах, а энергии в гигаэлектронвольтах (ГэВ) это равенство можно записать в виде

$$E_F \approx \frac{2 \cdot 10^{-16}}{r}$$

В частности, для изучения ядер атомов $r \approx 10^{-15}$ м ускоритель электронов должен иметь энергию не менее 0,2 ГэВ. Без ускорителя электроны не могут попасть в ядро, так как их энергия в атомах вещества меньше этой величины на 7 порядков.

Большой адронный коллайдер с энергией протонов $E = 14 \text{ ТэВ} = 1,4 \cdot 10^4 \text{ ГэВ}$ позволяет изучать структуру микрочастиц до размеров $r \sim 10^{-20}$ м;

8. Планковские размеры

Из основных мировых констант: скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, гравитационной постоянной $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² и постоянной Планка $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с методами теории размерностей можно получить только одну комбинацию единиц с размерностью длины (**планковскую длину**)

$$r = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ м}$$

Из соотношения неопределенности следует, что частица планковских размеров имеет **планковскую энергию** квантовомеханической природы

$$E_F = \frac{\hbar c}{r} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 2,0 \cdot 10^9 \text{ Дж} = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ}$$

Из формулы теории относительности $E_0 = mc^2$ следует, что эта частица имеет **планковскую массу**

$$m = \frac{E}{c^2} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ кг}$$

Оценка гравитационного радиуса для этой частицы дает величину порядка планковской длины

$$r_g = \frac{2Gm}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \cdot \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2r$$

То есть, такая частица является **черной дырой**, внутри которой понятия пространства и времени становятся неприменимы. А без понятий пространства и времени все физические теории не работают. Говорить о размерах, меньше планковских, не имеет смысла. Планковские размеры являются **естественной границей применимости физических теорий**.