

Programación Lineal



Características

¿Porqué usar la Programación Lineal?

La programación lineal es un procedimiento analítico, basado en la Ciencia Matemática que le permitirá tomar decisiones respecto a la industria, institución o cualquier entidad que requiera optimizar su funcionamiento. Muchos de los resultados de nos proporciona la programación lineal le permitirá predecir acontecimientos a través de una serie de datos que usted proporcione respecto a los recursos con los que cuente y a los requerimientos que desee para así poder obtener una integridad segura.

Elementos Importantes

1.- Las Variables de Decisión

2.- **La Función Objetivo:** En esta parte se busca Satisfacer su necesidad ya sea tener un max. de UTILIDADES o un min. de COSTOS

3.- **Las restricciones:** Estos son los recursos de los que se disponen y las proporciones de uso para cada estimador.

4. **Variables de Holgura o Exceso** Estas se agregan el las restricciones menores o iguales y mayores o iguales respectivamente

Ventajas de Uso

1.- Ayudar a los administradores a tomar decisiones.

2.- Es un método muy flexible para describir un gran número de situaciones reales como en el área industrial, de transporte, de la economía, de sistemas de salud, en las ciencias sociales, etc.

3.- Le permitirá mejorar su economía mediante la Max. de sus utilidades o Min. de costos, siempre pensando en su beneficio.

4.- Es muy práctico, ya que si existe algún cambio en el modelo se puede resolver de manera rápida (con el análisis de la sensibilidad).

5.- Se adecúa a sus necesidades mediante ya que método arroja resultados que le dicen en que invertir más o dejar de invertir

6.- Permite prever el efecto de las desviaciones respecto al plan, y realizar una acción correctiva anticipada en áreas con problemas.

7.- Permite comparar un amplio rango de soluciones alternativas y analizar sus consecuencias requiriendo para ello poco tiempo.

Planteamiento de un Modelo

Suponga que una Empresa produce pinturas tanto para interiores como para exteriores con la siguiente disponibilidad de recursos medidas en toneladas.

	Pintura Exterior	Pintura Interior	Disponibilidad Maximos diarios
Materia 1	6	4	24
Material 2	1	2	6
Utilidad (por tonelada)	\$5	\$4	

Una encuesta restringe la pintura para interiores a dos toneladas. Además la pintura para interiores no puede exceder a la de exteriores en una tonelada.

Modelo Primal:

x_1 : Toneladas de pintura exterior producida

x_2 : Toneladas de pintura interior producida

F.O. $\text{Max } z = 5000x_1 + 4000x_2$

S.A. $6x_1 + 4x_2 \leq 24 \rightarrow$ Materia Prima 1

$x_1 + 2x_2 \leq 6 \rightarrow$ Materia Prma 2

$x_2 \leq 2 \rightarrow$ Producir cuando más 2 tons. de pintura de Int.

$x_1 - x_2 \leq 1 \rightarrow$ La pintrura de Int. no excede a la de Ext. en 1 ton.
 $x_1, x_2 \geq 0$

Modelo Dual:

F.O. $\text{Min } g = 24y_1 + 6y_2 + 2y_3 + y_4$

S.A.

$6y_1 + y_2 + y_4 \geq 5000 \rightarrow$ Pintura de Exteriores

$4y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 \geq 4000 \rightarrow$ Pintura de Interiores

$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

Para darle Solución al Modelo Primal Utilizaremos el Método Simplex:

Primera tabla Para el Modelo Primal

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Sol.
$z_j - c_j$	-5000	-4000	0	0	0	0	0
x_3	6	4	1	0	0	0	24
x_4	1	2	0	1	0	0	6
x_5	0	1	0	0	1	0	2
x_6	1	-1	0	0	0	1	1

Aplicando Método Simplex se llega a la siguiente **Tabla Óptima**:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Sol.
$z_j - c_j$	0	0	0	3000	0	2000	20000
x_3	0	0	1	-3.333	0	-2.667	1.33333
x_2	0	1	0	0.3333	0	-0.333	1.66667
x_5	0	0	0	-0.333	1	0.3333	0.3333
x_1	1	0	0	0.3333	0	0.6667	2.6667

Por lo tanto la Solución Óptima del Modelo Primal es:

$x_1 = 2.666667$	$x_2 = 1.66667$	$x_3 = 1.33333$	Con un $z =$
$x_4 = 0$	$x_5 = 0.333$	$x_6 = 0$	20000

Interpretación Económica del Dual:

Como observamos en la tabla óptima del modelo dual, podemos obtener también la solución del modelo dual, que se ubica en la intersección del renglón del $z_j - c_j$ y las variables de holgura $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ además evaluando estos valores en la f.o del dual observamos que cumple con la dualidad fuerte donde $z = g$.

Por lo tanto tenemos

$y_1=0$	$y_2=3000$	$y_3=0$	$y_4=2000$	$g=20000$
---------	------------	---------	------------	-----------

Interpretación del a F.O del Dual

Para el Recurso	Contribución a la Ganancia	Contribución en %
Materia 1	\$0	0%
Materia 2	\$18000	90%
Contribución cuando la de Interiores es menor a 2 tons. = M3	\$0	0%
La ganancia cuando la pintura de Exteriores es mayor que la de interiores= M4	\$2000	10%
z (valor óptimo)	\$20000	100%

El recurso más importante es la Materia 2, ya que contribuye a la ganancia en un 90%

Precios Sombra

Para el Recurso	bi+1	z	bi-1	z
Materia 1	25	20000	23	20000
Materia 2	7	23000	5	17000
M3	3	20000	1	20000
M4	2	22000	0	18000

Le conviene invertir en la Materia 2 y además si quiere dejar de Invertir le sugiero lo haga en la Materia 1 debido a que no me reduce la ganancia hasta 1.33 tons.

Interpretación del Teorema de Holguras Complementarias

- a) $Ax^*-b=0 \Rightarrow y^*>0$
b) $y^*=0 \Rightarrow Ax^*-b>0$

Para el Recurso	Variable de Holgura	Yi	Significado
Materia 1	$x_1=2.666667$	$y_1=0$	No se acaba el Recurso
Materia 2	$x_4=0$	$y_2=3000$	Se agoto el Rcurso
M3	$x_3=1.33333$	$y_3=0$	
M4	$x_6=0$	$y_4=2000$	

- c) $-c^t+A^ty^*=0 \Rightarrow x^*>0$
d) $x^*=0 \Rightarrow -c^t+A^ty^*>0$

Tipo de Pintura	Costo de Producción	Costo de Venta	Valor de la V. de Decisión
Pintura Exterior	\$5000	\$5000	2.667
Pintura Interior	\$4000	\$4000	1.667

Implica que la ganancia de del Producto es igual al costo de producción y por lo tanto DEBO fabricar los dos Productos, la pintura para Exteriores y la de Interiores.

Análisis de Sensibilidad:

a) Suponga que se tiene menos disponibilidad de la Materia 1, y se reduce a 23 tons. ¿Afectaría la Solución Actual?

b) Suponga que con el fin de matizar más los colores se incorpora la Materia 3 en la cual se deben ocupar 5 tons. para la pintura de exteriores y 4 tons. para la de interiores de un total de 21 toneladas disponibles ¿La solución actual es

a) Para este lo que tenemos que hacer es calcular el x_B y en z, de ahí determinaremos si la sol. actual es la óptima.

Para esto calculamos $x_B = B^{-1}\hat{b}$

B^{-1}	$\cdot$	$\hat{b}$		x_B
----------	---------	-----------	--	-------

1	-3.333	0	-2.667		23		0.335
0	0.3333	0	-0.333		6	=	1.665
0	-0.333	1	0.3333		2		0.335
0	0.3333	0	0.6667		1		2.665

Como observamos no hay cambio de signo en x_B , por lo tanto la solución sigue siendo óptima, recordándola es es:

$x_1=2.666667$	$x_2=1.66667$	$x_3=1.33333$	Con un z=
$x_4=0$	$x_5=0.333$	$x_6=0$	20000

b) Como nos dimos cuenta de manera matemática, nos habla de agregar una nueva restricción, la cual sería $5x_1+4x_2\leq 21$, lo primero que haremos es probar si cumple con la sol actual, en dado caso, la sol actual es óptima.

Evaluando :

$5(2.66667)+4(1.66667)=20.003 \leq 21$, por lo tanto la solución actual es la óptima.

Conclusiones:

CON ESTO TENEMOS CLARO QUE LA PROGRAMACIÓN LINEAL ES UN MÉTODO MUY ECLÉCTICO POR LO CUAL SI USTED ESTÁ DISPUESTO A QUERER INVERTIR EN NUESTRO PROYECTO LE ASEGURAMOS QUE ES LA MEJOR OPCIÓN, YA QUE NUESTRO PROCEDIMIENTO CIENTÍFICO TIENE UN RESPALDO MATEMÁTICO QUE AVALA LA CALIDAD DE NUESTRO SERVICIO. MUCHAS GRACIAS Y ESPERAMOS VERLE UTILIZANDO ESTE MÉTODO LE JURAMOS QUE NO SE ARREPENTIRÁ

REALIZADO POR:

Referencias:

- >>(Morales, Miguel). (2012). Programación_Lineal (Imagen Digital). México. Archivo del Autor
- >>Programación Lineal (en línea). Recuperado de: <http://es.wikipedia.org/wiki/Programaci%C3%B3n_lineal> [Consulta:10-Mayo -2012]
- >>Rodríguez, Guadalupe."Método Simplex"/[Apuntes]. Naucalpan Edo. Mex., México.Optimización Lineal. UNAM FCS Acatlán: Licenciatura en MAC.