

Electricité

PREMIÈRE PARTIE: OSCILLATEUR ÉLECTRONIQUE

1) Régimes transitoires d'un circuit RLC

On considère le montage ci-dessous (Fig. E1). L est l'inductance d'une bobine parfaite, C est la capacité d'un condensateur, R est la résistance totale du circuit, K est un interrupteur et E un générateur parfait de tension continue.

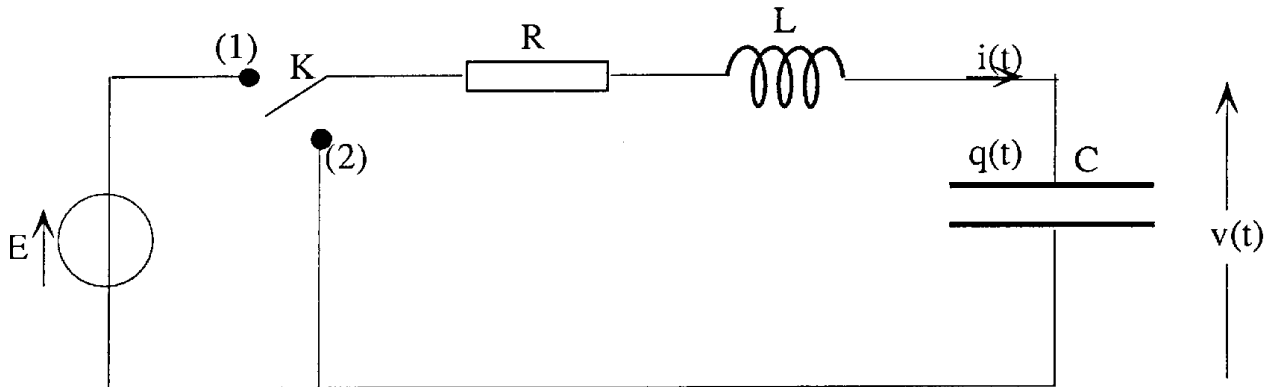


Fig. E1

On appelle:

- $q(t)$, la charge du condensateur à l'instant t ,
- $i(t)$, l'intensité dans le circuit à l'instant t ,
- $v(t)$, la tension aux bornes du condensateur à l'instant.

- 1.1) En tenant compte des conventions indiquées sur le schéma, écrire les relations entre $q(t)$ et $v(t)$, entre $q(t)$ et $i(t)$ et entre $i(t)$ et $v(t)$.
- 1.2) Le condensateur est initialement déchargé. A l'instant $t=0$, on ferme K en position (1).
- 1.3) Établir l'équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants à laquelle satisfait $v(t)$ en fonction de E , ω_0 et m avec ω_0 et m et .
- 1.4) Sans résoudre l'équation différentielle, montrer qu'il existe, selon les valeurs de m , deux régimes d'évolution possibles de la tension $v(t)$.
- 1.5) On définit la résistance critique comme étant la résistance du circuit correspondant à la limite entre ces deux régimes d'évolution. Exprimer cette résistance critique notée R_c en fonction de L et C .
- 1.6) Application numérique: $R = 100 \, \Omega$, $L = 40 \, \text{mH}$, $C = 1 \, \mu\text{F}$. Calculer ω_0 , m et R_c . Dessiner l'allure de la variation de $v(t)$ en fonction de t .

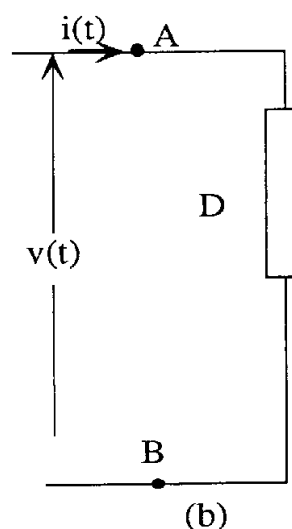
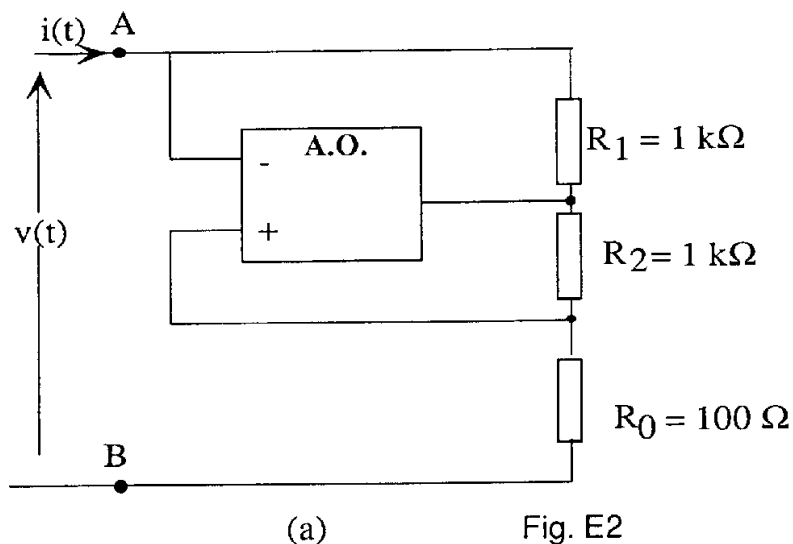
Dans la suite du problème, on gardera les valeurs numériques ci-dessus.

- 1.3) Lorsque le régime transitoire a disparu, on met K en position (2) et on prend cet instant comme nouvelle origine des temps.
- 1.4) Établir l'équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants à laquelle satisfait $v(t)$.
- 1.5) La solution générale de cette équation différentielle est avec a_1 , a_2 complexes.
Exprimer a_1 et a_2 en fonction de ω_0 et m .
- 1.6) En considérant les conditions initiales, exprimer les constantes d'intégration A_1 et A_2 en fonction de E , ω_0 et m .
- 1.7) On pose , .
Démontrer que .
Exprimer K . Représenter $v(t)$ en mettant en évidence K et l'enveloppe exponentielle de $v(t)$.
- 1.8) Décrire les échanges d'énergie au cours de la décharge du condensateur.

2) Oscillateur LC

L'amplificateur opérationnel utilisé dans le circuit qui suit est parfait et fonctionne en régime linéaire. Les circuits d'alimentation ne sont pas représentés.

- 2.1) On réalise l'élément de circuit AB (Fig. E2.a) équivalent au dipôle D (Fig. E2.b).



2.1.1) Montrer qu'on peut écrire $v(t) = -R i(t)$ et exprimer R en fonction de R_0 , R_1 et R_2 .

Calculer numériquement R .

2.1.2) On souhaite relever la caractéristique $i = f(v)$ de ce dipôle à l'aide d'un oscilloscope. Pour ce faire, on l'attaque avec une tension sinusoïdale alternative d'amplitude 1V crête à crête. Établir le schéma du montage.

Reproduire le document-réponse ci-dessous (Fig. E3) et y dessiner la caractéristique de D. On admettra qu'on peut placer la masse et les voies de mesure de l'oscilloscope en tout point du montage.

Dans quel mode de déviation horizontale doit-on mettre l'oscilloscope?

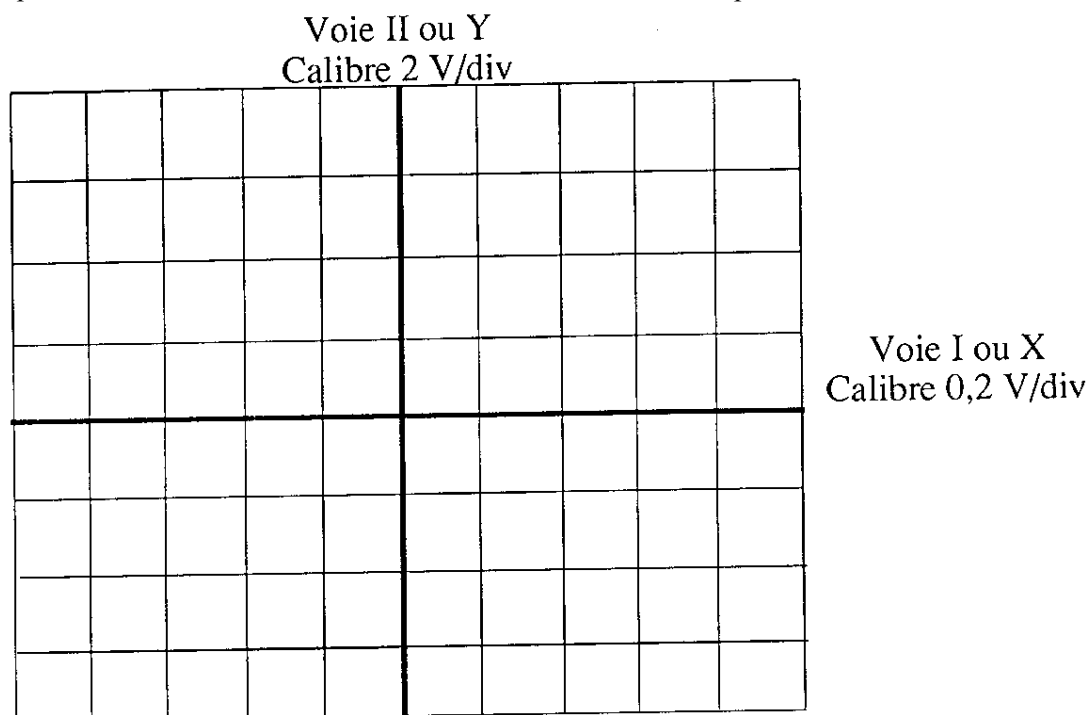


Fig. E3 : Document-réponse à reproduire.

2.2) Le condensateur possède une charge initiale. On ferme l'interrupteur K à l'instant $t=0$ et on observe la tension aux bornes du condensateur.

Dire qualitativement ce qu'on observe.

D'où vient l'énergie dissipée dans la résistance R ?

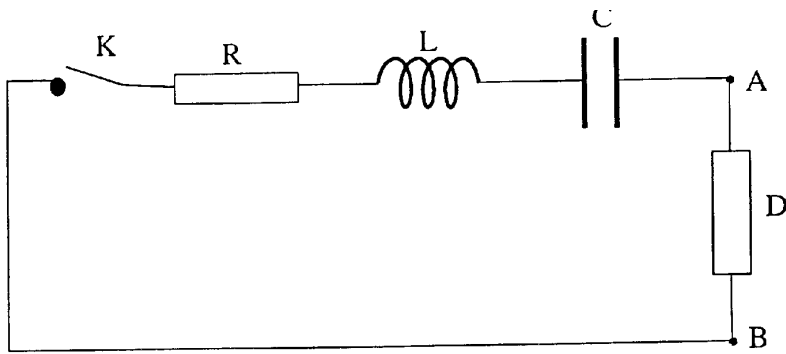


Fig. E4

DEUXIÈME PARTIE: OSCILLATEUR ÉLECTROMAGNÉTIQUE

L'espace est rapporté à un trièdre rectangle direct Oxyz et on désigne par $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$ respectivement les vecteurs unitaires des axes.

On rappelle que:

L'équation aux dérivées partielles admet comme solution générale:

3) Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

On se place dans le vide, en l'absence de charges et courants.

- 3.1) En partant des équations de Maxwell, établir les équations vectorielles reliant
- 3.2) On suppose que les champs cherchés ne dépendent que de la coordonnée spatiale z (les dérivées partielles des champs par rapport à x et y sont nulles). C'est l'hypothèse d'onde plane. Écrire les équations aux dérivées partielles auxquelles obéissent les composantes du champ électrique. Pour chaque composante, la solution de cette équation est la somme de deux termes. A quoi correspondent-ils ?
- 3.3) On considère un de ces deux termes. Montrer que l'onde correspondante est transversale et exprimer sa vitesse de propagation, notée c en fonction de ϵ_0 et μ_0 , respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide.
On admettra pour la suite et ce, sans démonstration, que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont orthogonaux et que le trièdre $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{c})$ est direct et que ($\mathbf{c}$ est le vecteur vitesse de l'onde: $\mathbf{c} = c \mathbf{k}$ ou $\mathbf{c} = -c \mathbf{k}$ suivant le sens de propagation).
- 3.4) On suppose:
Déterminer l'expression du champ magnétique d'amplitude B_1 . Préciser le rapport .
- 3.5) On suppose: . Déterminer l'expression du champ magnétique d'amplitude B_2 .
Préciser le rapport

4) Réflexion d'une onde plane sur un plan parfaitement conducteur

Une onde électromagnétique progressive plane se propage dans le vide vers un plan métallique parfaitement conducteur et normal à la direction de propagation qui se fait selon la direction Oz dans le sens de $\mathbf{k}$. Le métal est situé dans la région des $z > 0$. La géométrie du système est donnée ci-dessous.

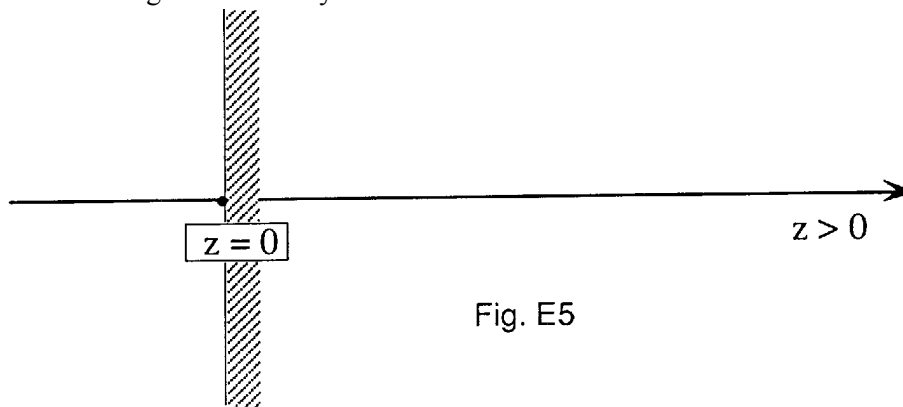


Fig. E5

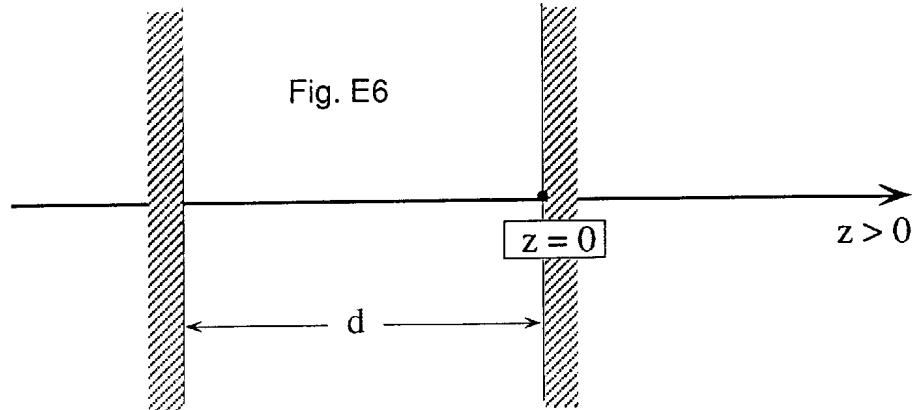
On suppose une onde incidente . On admet que le champ électrique est nul à l'intérieur du métal et que le champ magnétique n'y possède pas de composante variable dans le temps.

- 4.1) Montrer, sur la base des équations de continuité du champ électrique, qu'une onde réfléchie prend naissance à la surface du conducteur.

- 4.2) Exprimer les vecteurs $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{B}_2$ de cette onde réfléchie en fonction de E_1 , ω , t , z , c , $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$.
- 4.3) Exprimer les champs totaux $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en un point de coordonnée $z < 0$ où coexistent onde incidente et onde réfléchie.
- 4.4) Quel type d'onde obtient-on? Représenter $E(z)$.

5) Oscillateur électromagnétique

On crée un oscillateur en disposant dans le vide deux plans parallèles parfaitement conducteurs selon la géométrie ci-dessous (Fig. E6).



La distance entre les plans est donnée par: avec n entier et λ longueur d'onde de l'onde de pulsation ω . On se place dans l'approximation des ondes planes. On admet qu'un système d'ondes stationnaires existe dans le volume délimité par les deux plaques. On raisonne sur un volume cylindrique d'axe z , délimité par les deux plans et de section unité.

- 5.1) Exprimer la densité d'énergie électrique W_e et la densité d'énergie magnétique W_m du champ électromagnétique en fonction de z . On prendra pour expressions de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ celles obtenues à la question 4.3.
- 5.2) En intégrant ces grandeurs sur le volume défini ci-dessus, exprimer l'énergie électromagnétique totale en fonction de d , E_1 et ϵ_0 . Montrer qu'elle est constante.
- 5.3) Montrer qu'il y a échange permanent entre énergie électrique et énergie magnétique.

Mécanique

Nota Bene: les parties 1,2 et 3 sont indépendantes.

ÉTUDE D'UNE BIELLE

On se propose d'étudier la bielle (B) représentée schématiquement à la figure M₁ dans son mouvement particulier: rotation du pied selon la trajectoire S_p , et translation alternative de la tête selon la trajectoire S_t .

La partie 1 traite de la cinématique du mouvement bielle-manivelle.

Dans les parties 2 et 3, on cherche à déterminer les caractéristiques de la bielle:

centre de masse G , et moment d'inertie I_G en G .

La partie 4 établit les conditions d'équivalence dynamique.

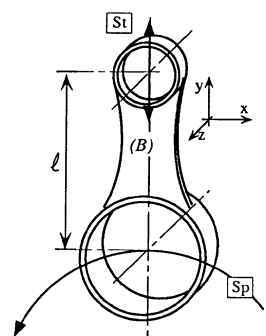


Fig. M1 : Vue de la bielle

1) CINÉMATIQUE

On considère le schéma de la figure M2 où:

- O_1 décrit un cercle de rayon r à la vitesse angulaire ω , l'angle θ repérant le bras de manivelle par rapport à la direction verticale lorsque le point O_2 est au plus haut (point mort haut);
- O_2 décrit un segment de droite repéré par la coordonnée y par rapport au centre de rotation O de la manivelle.

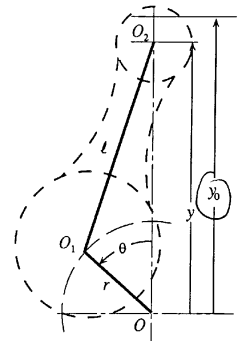


Fig. M2 : Paramètres cinématiques de la bielle

1.1)

- 1.1.1) Montrer que y peut se mettre sous la forme $y = r \cos(\theta)$, où l'on précisera l'expression de u .
- 1.1.2) Donner le développement limité au 1er ordre en u de y en $u=0$.
- 1.1.3) En considérant que le rapport $\lambda = r/l$ est petit devant 1, donner l'expression simplifiée de y en fonction de λ et θ .

- 1.1.4) Représenter dans un même système d'axes l'allure des fonctions $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ en fonction de θ sur un domaine allant de 0 à 2π . On précisera ordonnée et pente en $\theta=0$, ainsi que la position relative de ces deux fonctions.

1.1.5)

- 1.1.6) En tenant compte de l'approximation établie en 1.2, donner les expressions vectorielles des vitesse et accélération absolues des points O_1 en repère polaire (r, θ) , et O_2 en repère cartésien $Oxyz$. Montrer en particulier que l'amplitude de l'accélération de O_2 peut se mettre sous la forme $a_2 = \omega^2 l$ où l'on précisera les termes a et b .
- 1.1.7) Que peut-on dire de l'orientation des accélérations de O_1 et O_2 ?
- 1.1.8) A partir de considérations physiques simples, déterminer les modules des 2 premiers termes de la décomposition en série de Fourier de l'accélération de O_2 et les représenter sur un diagramme comportant ω en abscisse.
- 1.1.9) Compléter ce diagramme dans le cas où l'on prend en compte un développement limité d'ordre n pour λ .
- 1.1.10) A partir de ces deux derniers points, expliquer quelle difficulté il y a à équilibrer dynamiquement un système bielle-manivelle.

2) CENTRE DE MASSE

Dans un but de simplification, on admettra que la bielle réelle (Fig. M1) est constituée grossièrement de 3 solides (Fig M3):

- (C1) cylindre creux (rayons R_1 & r_1) de hauteur e_1 , de centre O_1 , d'axe de symétrie z_1 , et de masse m_1 ,
- (C2) cylindre creux (rayons R_2 & r_2) de hauteur e_2 , de centre O_2 , d'axe de symétrie z_2 , et de masse m_2 ,
- (P) plaque plane d'épaisseur e , de forme trapézoïdale tronquée par les formes enveloppes des cylindres, de masse m_p , et de centre de masse G_p .

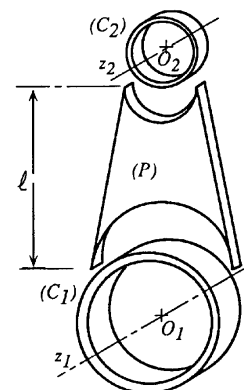


Fig. M3 : Modèle retenu montrant les parties constitutives de la bielle

Remarque: On ne se préoccupera pas des détails de raccordement entre la plaque et les cylindres; ainsi la plaque centrale a pour hauteur $O_1O_2 = l$, et pour bases les diamètres extérieurs des cylindres.

2.1)

2.1.1) A partir des solides proposés pour la constitution de la bielle, donner l'expression de sa masse totale m en fonction de la masse volumique μ du matériau, et des paramètres géométriques.

2.1.2) Calculer m pour kg.m^{-3} , $R_1=2$ $R_2 = 50$ mm, $r_1=2$ $r_2 = 45$ mm, $l=30\pi$ mm, $e_1=e_2=2e=10$ mm.

On arrondira au demi-gramme près pour chacun des solides.

2.1.3) A l'aide de croquis, indiquer la démarche utilisée pour déterminer la position du centre de masse G de la bielle à partir des solides de formes simples suivantes (cylindre, triangle, disque) pour lesquels masse et centre de masse sont connus. (aucun calcul n'est demandé)

3) MOMENTS D'INERTIE

3.1) Donner la définition du moment d'inertie I_{Oz} en O d'un solide (S) indéformable par rapport à l'axe z en repère cartésien $(Oxyz)$ sous forme intégrale.

3.2) Montrer que le moment d'inertie I_{Oz} du cylindre (C_1) par rapport à l'axe z_1 perpendiculaire au plan de la bielle et passant par O_1 peut se mettre sous la forme , ρ étant la masse volumique du solide.

3.3)

3.3.1) Montrer que pour une plaque plane de forme triangulaire isocèle d'épaisseur e , de hauteur h et de base $2b$, le moment d'inertie I_{Sz} par rapport à un axe z perpendiculaire au plan de la plaque et passant par son sommet peut se mettre sous la forme : , t étant un nombre sans dimension à préciser.

3.3.2) En déduire le moment d'inertie I_{Sz} de la plaque trapézoïdale de hauteur l représentée figure M4 par rapport à l'axe Sz passant par son sommet en fonction de ρ , e , t , R_1 et R_2 .

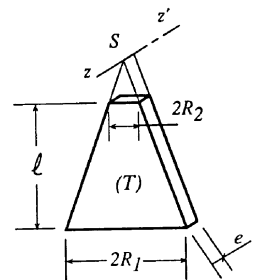


Fig. M4 : Plaque triangulaire

3.4) Utiliser les formes élémentaires décrites en 3.2 et 3.3 pour indiquer la méthode de détermination du moment d'inertie I_G de la bielle en son centre de masse G . (aucun calcul n'est demandé)

4) BIELLE ÉQUIVALENTE

Dans un souci de simplification supplémentaire, on se propose d'évaluer dans quelle mesure la bielle schématisée de la figure M1 peut être modélisée par 2 masses ponctuelles, l'une rotative m_r , l'autre alternative m_a , reliées par une tige rigide sans masse (Fig. M5.b).

On dit de deux systèmes matériels qu'ils sont équivalents dynamiquement s'ils répondent aux conditions suivantes:

- (c1) même longueur (cinématique),
- (c2) même masse (statique),
- (c3) même centre de gravité G (statique),
- (c4) même moment d'inertie en G (dynamique).

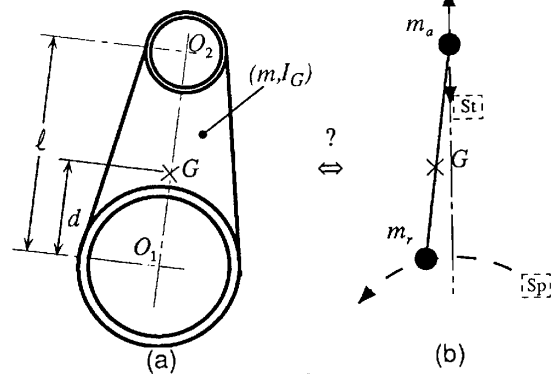


Fig. M5

(a) Caractéristiques de la bielle réelle ;
(b) Modèle proposé pour la bielle équivalente .

Compléter le tableau suivant rassemblant les conditions énoncées ci-dessus

Condition	Bielle réelle	Bielle équivalente
(c1): même longueur		distance de m_r à m_a
(c2): même masse	m	$m=m(m_a,m_r)= ?$
(c3): même centre de gravité		$d = d(m_a,m_r,l)$
(c4): même moment d'inertie en G	I_G	$I_G = I_G(m_a,m_r,l,d) = ?$

Préciser quelles sont les inconnues du système formé par les 3 dernières équations.

Que peut-on dire d'un tel système ? (aucun calcul n'est demandé)

4.2) A partir des relations traduisant les conditions (c2) et (c3), exprimer m_r et m_a en fonction des caractéristiques de la bielle réelle.

4.3)

- 4.4) Exprimer en fonction du rapport à partir de m_r et m_a trouvées à la question précédente, puis calculer I_G pour , $m= 0,1$ kg, $l=30\pi$ mm, et $\pi^2=10$.
- 4.5) Comparer la valeur de I_G trouvée ci-dessus à la valeur trouvée par l'expérimentation, soit .
Conclure sur la validité du modèle proposé si l'on admet un écart relatif de 10% avec le système réel.
- 4.6) Imaginer une procédure expérimentale utilisant uniquement une balance et un chronomètre pour situer le centre de masse G, et déterminer le moment d'inertie I_G de la bielle en G.