

Számelmélet, algebra, egyenlőségek, egyenlőtlenségek, számítási közép, mértani közép

A betűs kifejezések használatakor minden esetben fontos megadnunk, hogy az általunk használt betűk mely számhalmaz elemeit helyettesítik. Ez a számhalmaz az **alaphalmaz**.

Algebrai kifejezést kapunk, ha a négy alpműveletet számokra vagy betűkre véges sokszor alkalmazzuk. **Egyváltozós kifejezésről** beszélünk, ha abban csak egy betű szerepel. A több különböző betűt tartalmazó kifejezést **többsváltozós**nak nevezzük.

Ha az algebrai kifejezésben a változók helyére konkrét számokat helyettesítünk az alaphalmazból, akkor a műveletek elvégzése után egy számot, a kifejezés **helyettesítési értékét** kapjuk.

Algebrai **egész kifejezésről** beszélünk, ha az algebrai kifejezésben nincs tört, vagy az előforduló tört nevezőjében nincs változó.

Algebrai **törtekifejezésről** akkor beszélünk, ha az algebrai kifejezésben előforduló tört nevezőjében van változó.

Egy algebrai tört **értelmezési tartományán** a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát értjük, amelynek elemeit a változó helyére írva a kifejezésben szereplő műveletek elvégezhetőek.

Egytagú algebrai kifejezésről beszélünk, ha a kifejezésben a számok és a betűk s szorzás műveletével vannak összekapcsolva.

Többs tagú algebrai egész kifejezésnek vagy **polinomnak** nevezzük az egytagú algebrai egész kifejezések összegét.

Ha a tetszőleges valós szám, és m 1-nél nagyobb pozitív egész szám, akkor az a^m hatvány azt az m tényezős szorzatot jelenti, amelynek minden tényezője a .

Hatványozás azonosságai:

$$1. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$3. \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$4. \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$6. \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$7. \quad \text{Ha } a \neq 0, \text{ akkor } a^0 = 1$$

Egy valós szám esetén az $a \cdot 10^k$ alakot a szám **normálalakjának** nevezzük, ha $1 \leq |a| < 10$ és $k \in \mathbb{Z}$.

Az egytagú egész kifejezés **fokszáma** a változó(k) kitevőinek összege. A **polinom fokszáma** a legnagyobb tag fokszáma.

Két egytagú algebrai kifejezés **egynemű**, ha legfeljebb együtthatóikban különböznek egymástól.

Egy polinomban az egynemű tagokat összevonhatjuk.

Nevezetes szorzatok:

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Az a és b egész számok esetén akkor mondjuk, hogy az a szám osztója b -nek, ha van olyan c egész szám, amelyre $a \cdot c = b$. Jele: $a|b$.

Egy tízes számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható 2-vel, ha az utolsó számjegye osztható 2-vel.

Egy tízes számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha az utolsó számjegye 0 vagy 5.

Egy tízes számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két jegyből képzett kétjegyű szám osztható 4-gyel.

Egy tízes számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható 3-mal, illetve 9-cel, ha a számjegyek összege osztható 3-mal, illetve 9-cel.

Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek pontosan két pozitív osztója van, **prímszámoknak** nevezzük.

Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek kettőnél több pozitív egész osztója van, **összetett számoknak** nevezzük.

Az 1 nem prím és nem is összetett szám.

Végtelen sok prímszám van.

Bármely összetett szám felbontható prímszámok szorzatára, a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű módon.

Ha egy a összetett szám prímtényezős felbontása

$$a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k},$$

akkor az a osztóinak száma:

$$(r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) \cdot \dots \cdot (r_k + 1)$$

Két pozitív egész szám esetén a közös osztók közül a legnagyobbat a két szám **legnagyobb közös osztójának** nevezzük. A legnagyobb közös osztó a prímtényezős felbontásból

felállítható úgy, hogy a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk. Jele: $(a;b)$.

Azokat a pozitív egész számokat, melyeknek a legnagyobb közös osztója 1, **relatív prímeknek** nevezzük.

Két pozitív egész szám esetén a közös többszörösök közül a legkisebb pozitív számot a két szám **legkisebb közös többszörösének** nevezzük. A számok prímtényező felbontásából a legkisebb közös többszörös előállítható úgy, hogy minden előforduló prímet összeszorozunk az előforduló legnagyobb hatványon. Jele: $[a;b]$.

A két egész szám hányadosaként felírható számokat **racionális számoknak** nevezzük.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$$

Irracionális számoknak nevezzük azokat a számokat, melyek tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos.

A racionális számok halmazának és az irracionális számok halmazának uniója a **valós számok** halmaza.

A valós számok halmazának jele R , az irracionális számok halmazát pedig szokás Q^* -gal jelölni. Ezekkel a jelölésekkel: $R = Q \cup Q^*$.

Ha $a \geq 0$, akkor $\sqrt{a}$ jelöli azt a nemnegatív számot, amelynek négyzete a .

A négyzetgyökvonás azonosságai:

$$1. \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$2. \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$3. \quad (\sqrt{a})^k = \sqrt{a^k}$$

Egy nemnegatív a szám **$2k$ -edik gyökén** ($k \in \mathbb{N}^+$) azt a nemnegatív számot értjük, amelynek $2k$ -edik hatványa a .

$$\left(\sqrt[2k]{a} \right)^{2k} = a, \text{ ha } a \geq 0$$

Egy a valós szám **$(2k+1)$ -edik gyökén** ($k \in \mathbb{N}^+$) azt a valós számot értjük, amelynek $(2k+1)$ -edik hatványa a .

$$\left(\sqrt[2k+1]{a} \right)^{2k+1} = a$$

Az n -edik gyökvonás azonosságai:

$$1. \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$2. \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$3. \quad \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^k$$

$$4. \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$5. \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

Az a pozitív szám $\frac{m}{n}$ -edik hatványa az a alap m -edik hatványának n -edik gyöke:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

A b szám **a alapú logaritmusa** az a kitevő, amelyre a -t emelve b -t kapunk, ahol $a > 0$; $a \neq 1$ és $b > 0$.

Jele: $\log_a b$.

A 10-es alapú logaritmus jele $\lg$.

Az e alapú logaritmus jele $\ln$.

A logaritmus azonosságai:

$$1. (x \cdot y) = x + y$$

$$2. \frac{x}{y} = x - y$$

$$3. x^k = x$$

$$4. b = \frac{b}{a}$$

Az egyenlet megoldása grafikus módszerrel: Az egyenletek két oldalát úgy tekintjük, mint függvények hozzárendelési szabályát, és ezeket ábrázolva keressük meg a grafikonjaik metszéspontjait. a közös pont x koordinátája megadja az egyenlet gyökét.

Az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakja:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

ahol az a , b , c adott valós számok, és $a \neq 0$.

Az $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) másodfokú egyenletnek

– **két valós gyöke** van: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ha $D = b^2 - 4ac > 0$;

– **egy valós gyöke** van: $x = -\frac{b}{2a}$, ha $D = b^2 - 4ac = 0$;

– **nincs valós gyöke**, ha $D = b^2 - 4ac < 0$

Az $a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ alakot a másodfokú egyenlet **gyöktényezős alakjának** nevezzük.

Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói között fennállnak a következő összefüggések:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{és} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ezeket az összefüggéseket **Viète-féle formuláknak** is nevezzük.

Egyenlőtlenségek algebrai úton való megoldása:

- ◆ Az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadhatjuk vagy mindkét oldalából kivonhatjuk ugyanazt a konstans.
- ◆ Ismeretlen tartalmazó kifejezést is hozzáadhatunk, vagy kivonhatunk, ha az nem változtatja meg az egyenlőtlenség értelmezési tartományát.
- ◆ Pozitív konstanssal szorozhatjuk és oszthatjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát.

Ha negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk az egyenlőtlenséget, akkor az egyenlőtlenség irányát az ellenkezőjére kell változtatnunk ahhoz, hogy az egyenlőtlenség megoldáshalmaza változatlan maradjon.

Ha ismeretlen tartalmazó kifejezéssel szorzunk, vagy osztunk, akkor gondolnunk kell arra, hogy az lehet pozitív vagy negatív is, tehát ezeket az eseteket külön-külön meg kell vizsgálnunk.

A két egyenlet együtt egy **lineáris egyenletrendszer** alkot, melynek általános alakja:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

ahol a, b, c, d, e, f valós számokat jelöl.

A **behelyettesítő módszer** során az alábbi módon járunk el:

1. Az egyik egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent.
2. Az ismeretlenre kapott kifejezést behelyettesítjük a másik egyenletbe. Így egy egyismeretlenes egyenletet kapunk, amit a szokásos módon megoldunk.
3. Az így kapott értéket a másik egyenletbe visszahelyettesítve a másik ismeretlent is meghatározzuk.

Az **egyenlő együtthatók módszerét** alkalmazhatjuk akkor is, ha az egyenletekben nem szerepelnek egyenlő együtthatókkal változók.

1. Megszorozzuk az egyenletek mindkét oldalát egy-egy olyan nullától különböző számmal, hogy az egyik ismeretlen együtthatói abszolút értékben megegyezzenek.
2. Ezt az ismeretlent a két egyenlet összeadásával vagy kivonásával kiküszöböljük.
3. Megoldjuk az egyismeretlenes egyenletet, majd az egyik egyenletbe behelyettesítve kiszámoljuk a másik ismeretlent.

A három vagy annál több ismeretlen tartalmazó egyenletrendszerek megoldása közben mindig arra törekszünk, hogy egy-egy ismeretlen kiküszöbölésével kevesebb ismeretlen tartalmazó egyenletrendszerhez jussunk.

Két nemnegatív szám **számtani közepén** a két szám összegének a felét értjük:

$$A(a, b) = \frac{a+b}{2}$$

Két nemnegatív szám **mértani közepén** a két szám szorzatának négyzetgyökét értjük:

$$G(a, b) = \sqrt{ab}$$

Két nemnegatív a és b valós szám esetén

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Tetszőleges $a > 0$ pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2.