Преподаватель Семенова Ольга Леонидовна

Математика

Группа ТЭК 2/3

23.11.2022

Лекция

Исследование поведения функции с помощью производной и построение графиков функций.

Цели:

1.**Образовательная**: рассмотреть алгоритм исследования функции с помощью производной и построение график, формировать навыки исследования функции и построения графика.

*2.***Воспитательная***:* воспитать логическое мышление, внимание.

*3.***Развивающая***:* развитие коммуникативных качеств, критического мышления, познавательной активности студентов.

Формируемые общие и профессиональные компетенции: Материал лекции на тему: «Исследование поведения функции с помощью производной и построение графиков функций» формирует такие общие компетенции:

- ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
- ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
- ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
- ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
- ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
- ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
- ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.
- ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
- ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Вопросы лекции:

1) Алгоритм исследования функции и построение графика.
2) Пример исследования функции и построение графика.

Алгоритм

1. Найти область определения. Выделить особые точки (точки разрыва).
2. Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.
3. Найти точки пересечения с осями координат.
4. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
5. Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций).
6. Найти точки экстремума и интервалы монотонности.
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
8. Найти наклонные асимптоты. Исследовать поведение на бесконечности.
9. Выбрать дополнительные точки и вычислить их координаты.
10. Построить график и асимптоты.

Провести полное исследование и построить график функции

$$y(x)=(x^2+8)/(1-x)$$

1) Область определения функции. Так как функция представляет собой дробь, нужно найти нули знаменателя.

$$1-x=0, \Rightarrow x=1$$

Исключаем единственную точку x=1 из области определения функции и получаем:

$$D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty).$$

2) Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва. Найдем односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2+8}{1-x} = +\infty; \ \lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2+8}{1-x} = -\infty$$

Так как пределы равны бесконечности, точка x=1x=1 является разрывом второго рода, прямая x=1x=1 - вертикальная асимптота.

3) Определим точки пересечения графика функции с осями координат.

Найдем точки пересечения с осью ординат Oy, для чего приравниваем x=0x=0:

$$y = \frac{0^2 + 8}{1 - 0} = 8$$

Таким образом, точка пересечения с осью Oy имеет координаты (0;8).

Найдем точки пересечения с осью абсцисс Ox, для чего положим y=0:

$$\frac{x^2 + 8}{1 - x} = 0 \rightarrow x^2 + 8 = 0$$

Уравнение не имеет корней, поэтому точек пересечения с осью Ox нет.

Заметим, что $x^2+8>0$ для любых x. Поэтому при x∈(−∞;1)x∈(−∞;1) функция y>0 (принимает положительные значения, график находится выше оси абсцисс), при x∈(1;+∞) функция y<0 (принимает отрицательные значения, график находится ниже оси абсцисс).

4) Функция не является ни четной, ни нечетной, так как: $y(-x) = \frac{(-x)^2 + 8}{1 - (-x)} = \frac{x^2 + 8}{1 + x};\ \ y(-x) \neq y(x); y(-x) \neq -y(x)$

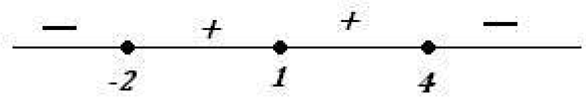
5) Исследуем функцию на периодичность. Функция не является периодической, так как представляет собой дробно-рациональную функцию.

6) Исследуем функцию на экстремумы и монотонность. Для этого найдем первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{x^2 + 8}{1 - x}\right)' = \frac{(x^2 + 8)'(1 - x) - (x^2 + 8)(1 - x)'}{(1 - x)^2} = \frac{2x(1 - x) - (x^2 + 8)(-1)}{(1 - x)^2} =$$
$$= \frac{2x - 2x^2 + x^2 + 8}{(1 - x)^2} = -\frac{x^2 - 2x - 8}{(1 - x)^2}$$

Приравняем первую производную к нулю и найдем стационарные точки (в которых y′=0): $y' = 0 \rightarrow -\frac{x^2 - 2x - 8}{(1 - x)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow\ \ x = -2; x = 4$

Получили три критические точки: x=−2,x=1,x=4. Разобьем всю область определения функции на интервалы данными точками и определим знаки производной в каждом промежутке:



При x∈(−∞;−2),(4;+∞) производная y′<0, поэтому функция убывает на данных промежутках.

При x∈(−2;1),(1;4) производная y′>0y′>0, функция возрастает на данных промежутках.

При этом x=−2 - точка локального минимума (функция убывает, а потом возрастает), x=4- точка локального максимума (функция возрастает, а потом убывает).

Найдем значения функции в этих точках:

$$y(-2) = \frac{(-2)^2+8}{1-(-2)} = \frac{12}{3} = 4 \quad y(4) = \frac{4^2+8}{1-4} = \frac{24}{-3} = -8$$

Таким образом, точка минимума (−2;4), точка максимума (4;−8).

7) Исследуем функцию на перегибы и выпуклость. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \left(-\frac{x^2-2x-8}{(1-x)^2}\right)' = -\frac{(x^2-2x-8)'(1-x)^2-(x^2-2x-8)((1-x)^2)'}{(1-x)^4} =$$
$$= -\frac{(2x-2)(1-x)^2-(x^2-2x-8)\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = -\frac{(2x-2)(1-x)+2(x^2-2x-8)}{(1-x)^3} =$$
$$= -\frac{2(-x^2+2x-1+x^2-2x-8)}{(1-x)^3} = \frac{-2\cdot(-9)}{(1-x)^3} = \frac{18}{(1-x)^3}$$

Приравняем вторую производную к нулю:

$$y'' = 0 \to \frac{18}{(1-x)^3} = 0$$

Полученное уравнение не имеет корней, поэтому точек перегиба нет. При этом, когда x∈(−∞;1)x∈(−∞;1) выполняется y″>0y″>0, то есть функция вогнутая, когда x∈(1;+∞)x∈(1;+∞) выполняется y″<0y″<0, то есть функция выпуклая.

8) Исследуем поведение функции на бесконечности, то есть при $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+8}{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-1} = -\infty; \ \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+8}{1-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-1} = +\infty$$

Так как пределы бесконечны, горизонтальных асимптот нет.

Попробуем определить наклонные асимптоты вида y=kx+by=kx+b. Вычисляем значения k,bk,b по известным формулам:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+8}{x-x^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

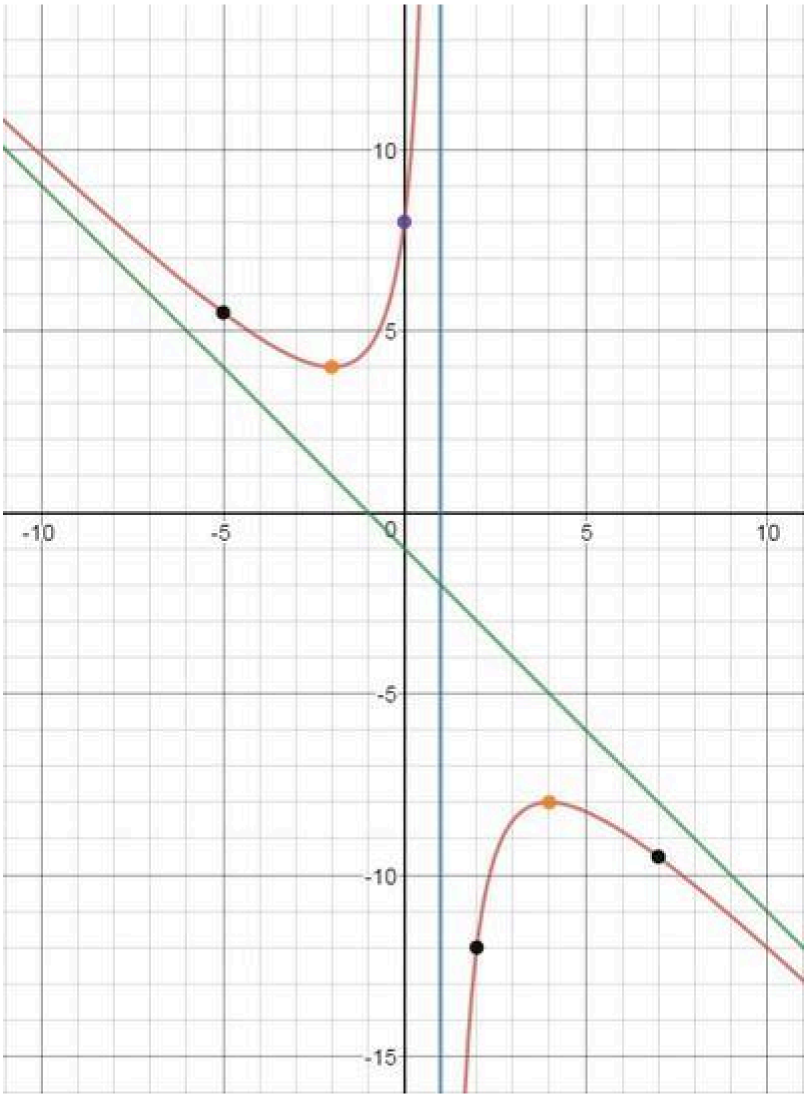
$$b = \lim_{x\to\infty} (y-kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+8}{1-x} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+8+x-x^2}{1-x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{8+x}{1-x}\right) = \frac{1}{-1} = -1$$

Получили, у что функции есть одна наклонная асимптота y=−x−1y=−x−1.

9) Дополнительные точки. Вычислим значение функции в некоторых других точках, чтобы точнее построить график.

y(−5)=5.5;y(2)=−12;y(7)=−9.5.

10) По полученным данным построим график, дополним его асимптотами x=1x=1 (синий), y=−x−1y=−x−1 (зеленый) и отметим характерные точки (фиолетовым пересечение с осью ординат, оранжевым экстремумы, черным дополнительные точки):



Домашнее задание

Изучить материал.

Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=x^3 / (x^2-1).$$

Ответы присылать на электронную почту: teacher-m2022@yandex.ru