

COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Epreuve commune aux ENS de Lyon et Cachan)

Durée : 4 heures

Ce problème vous propose d'étudier quelques aspects d'une technique utilisée en géophysique : la sismologie. Dans trois parties largement indépendantes, vous étudierez les ondes longitudinales dans le sol, les détecteurs sismiques et enfin une modélisation simple de la source de ces ondes.

Les questions qualitatives ne demandent pas de longs développements mais la présentation de quelques idées physiques essentielles.

Partie A : Ondes longitudinales

On choisit une modélisation unidimensionnelle du milieu élastique que constitue le sol. Il est décrit par une chaîne infinie de points matériels tous identiques de masse m , représentés par un indice p et reliés par des ressorts de même raideur k (Figure 1).

figure 1

On considère que seules les forces élastiques interviennent et que les mouvements se font uniquement suivant l'axe x . Au repos toutes les masses sont distantes de a ; on note x_p le déplacement de la masse d'indice p par rapport à sa position d'équilibre.

A.1 Déterminer l'équation différentielle donnant accès au mouvement de la masse d'indice p .

A.2 On recherche les solutions sous la forme d'ondes: $x_p = X_0 \cos(Kpa - \omega t)$ avec ω réel. Établir une relation entre ω et K ; tracer la courbe donnant ω en fonction de K .

A.3 Comment peut-on interpréter les différentes valeurs de K associées à une valeur donnée de ω , on s'intéressera à la parité et à la périodicité des valeurs de K ? Dans ces conditions peut-on restreindre le domaine de définition de K ? Déterminer les vitesses de phase et de groupe des ondes longitudinales ; le milieu est-il dispersif ?

A.4 Montrer que la chaîne peut être considérée comme un filtre dont on donnera la nature et la pulsation de coupure ω_c .

A.5 Dans le cas $\omega > \omega_c$, sous quelle nouvelle forme peut-on chercher x_p ?

A.5.1 Expliquer qualitativement et sans calculs ce qui se passe.

A.5.2 Déterminer explicitement la forme de x_p .

A.6 On s'intéresse maintenant au domaine K faible.

A.6.1 Par quelle inégalité entre grandeurs physiques peut-on définir K faible ?

A.6.2 Que devient la relation liant K à ω ?

A.6.3 Que deviennent les vitesses de phase et de groupe, le milieu est-il dispersif ?

Quel type d'ondes, plus connu, a-t-on trouvé ici ?

A.7 Le modèle précédent peut-il être utilisé pour décrire les vibrations longitudinales d'un réseau cristallin unidimensionnel ? Que modélisent alors les masses et les ressorts ? Dans un cristal quelles sont les forces en jeu à l'échelle microscopique ? Les forces élastiques en constituent-elles une modélisation acceptable ?

A.8 Des études de géophysique sur la propagation des ondes sismiques longitudinales dans le sol terrestre donnent les résultats suivants (Figure 2) pour la vitesse de propagation en fonction de la profondeur. Les fréquences observées sont de l'ordre de 10^1 à 10^2 Hz.

figure 2

Que représentent les discontinuités de vitesse, que peut-on en déduire quant à la structure du globe terrestre ?

Partie B : Etude du sismographe

Dans toute cette partie, la surface du sol sera considérée comme plane.

Le sismographe est un appareil destiné à enregistrer les vibrations du sol sous l'action d'un séisme. Nous envisageons un mouvement du sol décrit par une vibration verticale :

$$z_s(t) = Z_0 \cos \omega t,$$

par rapport à un niveau de référence $Z = 0$ dans un référentiel galiléen.

B.1 Le sismographe est constitué d'un support rigide de hauteur h auquel on suspend une masse m par l'intermédiaire d'un ressort sans masse, de raideur k . Le ressort prend alors une longueur l_1 . (Figure 3). La masse a un mouvement vertical amorti par un frottement fluide, le coefficient de frottement est noté λ .

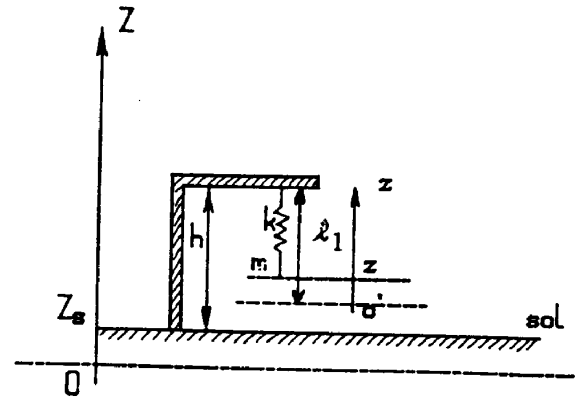


Figure 3

B.1.1 Déterminer l'équation différentielle donnant le mouvement de la masse m , repérée par la cote $z(t)$.

B.1.2 Déterminer l'amplitude A du mouvement de la masse m en régime forcé et tracer la courbe donnant A/Z_0 en fonction de ω dans le cas où le coefficient d'amortissement vérifie : $\lambda^2 < 2km$.

B.1.3 L'utilisateur souhaite observer un mouvement dont l'amplitude soit, dans la mesure du possible, égale à l'amplitude du mouvement du sol. Comment doit-il choisir m et k , la pulsation ω étant fixée ? Justifier ce résultat physiquement.

Les fréquences de vibrations enregistrées étant dans la gamme de $1 \text{ à } 10 \text{ Hz}$, quelle relation sur m et k obtient-on ? Que dire, à l'équilibre, de l'allongement du ressort soumis au seul poids de la masse m ?

B.2 Suspension de La Coste .

On définit un trièdre direct $Oxyz$. Dans le plan Oyz , on définit un axe Oz' tel que l'angle $(Oz, Oz') = \alpha$ soit constant. P est un point fixe de Oz' , on note $OP = d$. Dans le plan Oyz , une tige OA de longueur l , de masse négligeable peut tourner sans frottement autour de Ox . En A est fixé un disque homogène de masse m et de rayon R .

Un ressort sans masse, de raideur k , de longueur à vide nulle et assujéti à rester rectiligne relie le point P au point A (Figure 4).

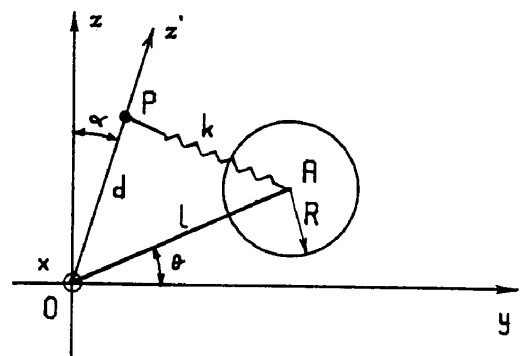


Figure 4

B.2.1 Déterminer les valeurs de θ à l'équilibre du système ; on envisagera les deux possibilités : $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$.

On se limite au domaine : $\theta \in [-\pi/2; \pi/2 - \alpha]$

B.2.2 A quelle condition la position $\theta = 0$ est-elle une position d'équilibre ?

Dans ce cas, quelle est la période des petites oscillations autour de $\theta = 0$? Quelle valeur de α doit-on choisir pour avoir une période de 10s en prenant :

$$l = 20 \text{ cm} ; R = 5 \text{ cm} \text{ et } g = 10 \text{ m.s}^{-2} ?$$

B.2.3 On envisage le cas où le disque est libre de tourner autour de l'axe Ax sans frottement. La période du mouvement est-elle changée, quelle est sa valeur ?

B.3 Enregistrement des mouvements sismiques.

On revient au sismographe décrit au début de cette partie, soumis à la même vibration du sol :

$$Z_s = Z_0 \cos \omega t,$$

en négligeant le frottement fluide d'origine mécanique de coefficient λ . On suspend la masse m une bobine de N spires circulaires de rayon a , de masse négligeable, de résistance électrique R et de coefficient d'auto-inductance L . Les extrémités du fil constituant la bobine sont reliées aux points C et D par des fils infiniment souples et sans influence électrique ou mécanique.

La bobine mobile reste toute entière dans l'entrefer d'un aimant d'axe de symétrie Δ créant au niveau des spires un champ magnétique radial de module B constant (Figure 5).

B.3.1 Les bornes C et D de la bobine étant connectées à une résistance extérieure R_e , quelles sont les équations donnant le mouvement de la masse m et le courant I dans la bobine ?

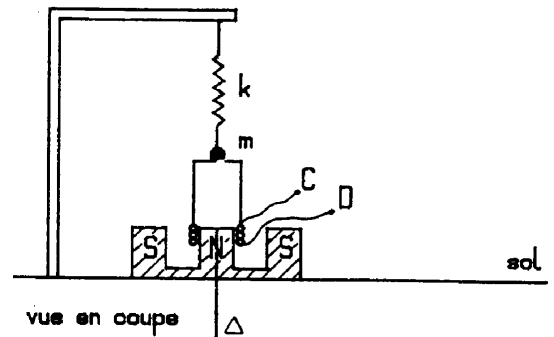


figure 5

B.3.2 Rechercher les solutions de ces équations en régime forcé à la pulsation ω . Simplifier le résultat en supposant $L\omega \ll R$.

Au niveau mécanique a-t-on un phénomène du type frottement fluide ? On précisera le coefficient de frottement correspondant.

Peut-on dire que la tension $V_s(t)$ entre les bornes C et D est proportionnelle à la vibration du sol $Z_s(t)$? Quelle opération doit-on faire subir au signal électrique pour détecter l'amplitude du mouvement du sol ?

B.3.3 On propose une variante du montage électrique (Figure 6).

Déterminer la fonction de transfert de ce montage ; l'amplificateur opérationnel étant supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire.

Quelle est l'allure du diagramme de Bode de ce montage ?

Quelles sont les fonctions réalisées par ce montage à basse et à haute fréquence ? On précisera les notions de basse et haute fréquence.

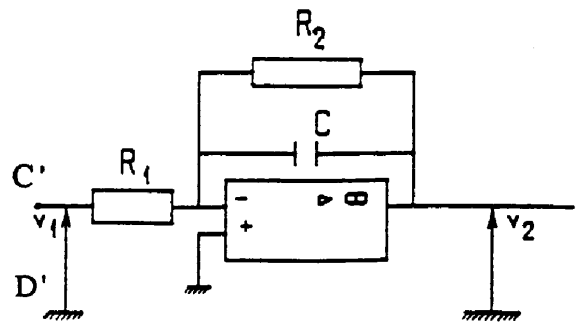


figure 6

. B.3.4 On introduit ce montage à la place de Re :

C (respectivement D) est connecté en C' (respectivement D').

Afin d'obtenir une tension V_2 proportionnelle à l'amplitude du mouvement du sol comment doit-on choisir les valeurs caractéristiques des éléments du circuit ?

Partie C: Frottement solide .

C.1 Rappeler les lois de Coulomb du frottement de glissement .

C.2 Les tremblements de terre peuvent apparaître lors du glissement de deux plaques tectoniques. On modélise l'une des plaques par un plan solide fixe π , l'autre plaque est modélisée par un ensemble constitué d'une masse M reliée par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 à un support S mobile à la vitesse u constante suivant l'axe x (Figure 7). Le contact entre la masse M et le plan fixe peut être caractérisé par un coefficient de frottement de glissement statique (respectivement dynamique) f_0 (respectivement f) avec $f \leq f_0$.

figure 7

C.2.1 Quelle propriété de la plaque mobile est modélisée par le ressort ?

C.2.2 Quel est le mouvement $x(t)$ de la masse M en supposant qu'à la date $t = 0$, l'abscisse du support S est nulle, la masse M est à l'abscisse ℓ_0 avec une vitesse nulle. On représentera x en fonction du temps t .

C.2.3 Que se passe-t-il dans les deux cas limites suivants :

$$k \rightarrow \infty$$

$$f = f_0$$

Interpréter les résultats obtenus.

C.3 Essai de modélisation microscopique.

À l'échelle microscopique, les surfaces ne sont pas planes, on envisage le contact de deux systèmes représentés chacun par une plaque solide et une "pointe" (Figure 8). Le système 1 est fixe et lors de son déplacement, le système 2 se soulève progressivement pour que la pointe 2 passe au dessus de la pointe 1.

figure 8

L'interaction des deux pointes est caractérisée par une énergie potentielle d'interaction E_{pi} , fonction de la distance entre les sommets S_1 et S_2 des deux pointes.

C.3.1 Dans cette question, on suppose les deux systèmes parfaitement rigides, leurs positions relatives étant représentées par la variable x , on choisit $x = 0$ lorsque les sommets S_1 et S_2 des deux pointes sont face à face.

Parmi les formes d'énergies potentielles proposées (figure 9) laquelle vous semble convenir ? Pourquoi ?

figure 9

Comment est reliée la force exercée par le système 1 sur le système 2 à cette énergie potentielle ?

C.3.2 On doit introduire un effet supplémentaire : lors de leur interaction, les systèmes 1 et 2 peuvent subir une légère déformation.

Pour simplifier, on considère encore le système 1 comme parfaitement rigide, le sommet S_1 de la pointe 1 reste en $x = 0$.

La plaque 2 étant représentée par x , la pointe S_2 se déplace de X suivant l'axe des x par rapport à la plaque 2, le sommet S_2 venant à l'abscisse $X+x$.

figure 10

(Figure 10). La forme de la fonction E_{pi} est supposée inchangée.

L'énergie potentielle associée à cette déformation interne au système 2 se met sous la forme :

$$E_{pe} = 1/2(kX^2).$$

Quelle est alors l'énergie potentielle totale du système notée E_{pt} en fonction de E_{pi} , de E_{pe} et des variables x et X ?

C.3.3 Pour une position x donnée de la plaque 2 par rapport à la plaque 1, déterminer graphiquement X_e correspondant à l'équilibre des deux pointes (on pourra introduire la variable $u = x + X$). Montrer qu'on aboutit à deux situations donnant une ou trois solutions pour X_e suivant les valeurs de certains paramètres.

Discuter qualitativement la stabilité des solutions obtenues dans les deux situations .

Tracer l'allure des courbes donnant u à l'équilibre en fonction du paramètre x dans les deux situations mises en évidence précédemment .

C.3.4 Quelle force doit-on exercer sur le système 2 pour le maintenir immobile, le système 1 étant toujours fixe ? On exprimera cette force en fonction de E_{pi} et de ses dérivées. Tracer les variations de cette force en fonction de x dans les différentes situations mises en évidence.

Quel phénomène voit-on apparaître dans l'une d'elles ?

C.3.5 Le système 2 est mis en mouvement par rapport au système 1, la variable x varie lentement de $-\infty$ à $+\infty$.

Montrer que le travail de la force de contact entre les deux solides correspond à une aire sur l'un des graphes qui ont été tracés .

Montrer que dans l'une des situations envisagées, on peut justifier l'existence d'un frottement de glissement .