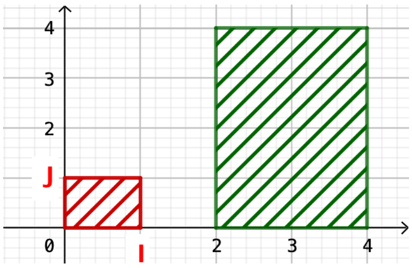
Chapitre 8
Calcul intégral

🖥️ **Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/pFKzXZrMVxs**

En 1696, Jacques **Bernoulli** reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIVème siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on partait de l'équation de la courbe pour calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).
Au milieu du XIXème siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l'idée qu'une personne s'intègre à un groupe.

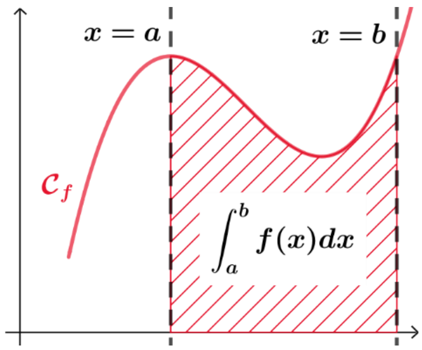
I. Intégrale et aire

1. Unité d'aire



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire **1 unité d'aire**. On écrit **1** $u.a.$
L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à **8** $u.a.$
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (en cm^2 par exemple).

2. Définition



Soient $a, b \in R$. Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$.
On appelle **intégrale de f sur $[a; b]$** l'aire, exprimée en $u.a.$, de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

3. Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a; b]$ se note

$$\int_a^b f(x)dx$$

Et on lit « **intégrale de a à b de** $f(x)dx$ ».

Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von* ***Leibniz*** ($1646 - 1716$). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme **S**omme infinie d'autres aires.
Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard* ***Riemann*** ($1826 - 1866$) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

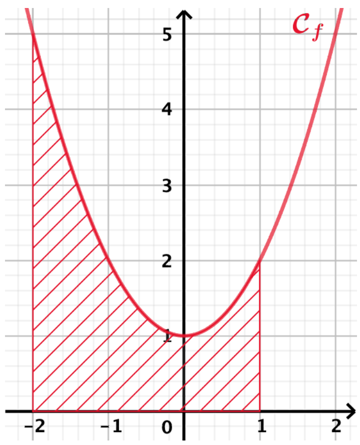
Remarques

- a et b sont appelés les **bornes d'intégration**.
- x est une **variable muette**. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs. Ainsi on peut écrire

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

dx ou dt nous permettent de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple



L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f définie sur R par

$$f(x) = x^2 + 1$$

l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 1]$ et se note

$$\int_{-2}^{1} \left(x^2 + 1\right)dx$$

Un logiciel de calcul formel peut permettre d'obtenir l'aire cherchée.

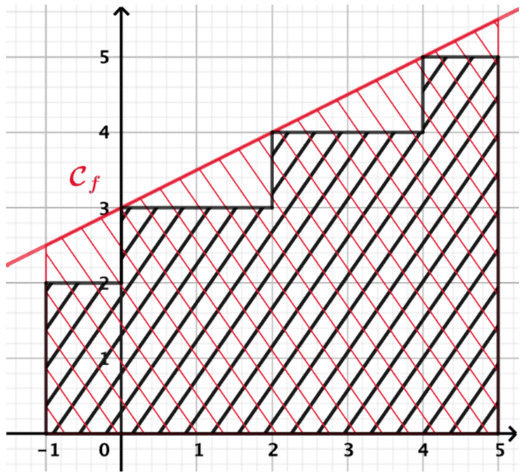
$$\int_{-2}^{1}\left(x^2 + 1\right)dx = 6$$

Méthode
Déterminer une intégrale par calculs d'aire
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/jkxNKkmEXZA**

a. Tracer dans un repère orthonormé la représentation graphique de la fonction f définie sur R par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

b. Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)dx$



Solution
a. Je trace la représentation graphique de la fonction f.

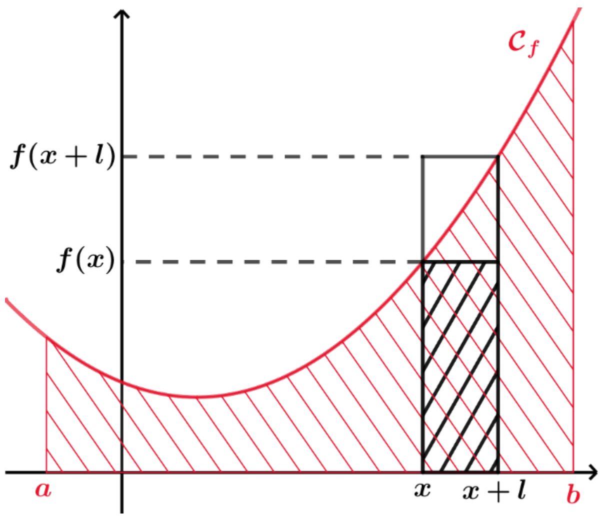
b. Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$. Donc, par dénombrement, on obtient

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = 21\, u.a. + 3\, u.a. = 24\, u.a.$$

4. Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a; b]$. On partage l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude

$$l = \frac{b-a}{n}$$



Sur un intervalle $[x; x + l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles

- l'un de dimensions l et $f(x)$ qui a pour aire
$$l \times f(x)$$
- l'autre de dimensions l et $f(x + l)$ qui a pour aire
$$l \times f(x + l)$$

Sur l'intervalle $[a; b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles d'aire inférieure et la somme des n rectangles d'aire supérieure.

Exemple
Avec Python, on programme l'algorithme ci-contre pour la **fonction carré**.

$$f(x) = x^2$$

```
def rectangle(a,b,n):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*x**2
        x=x+l
        p=p+l*x**2
    return m,p
```

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur $[1; 2]$. En augmentant le nombre d'intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles d'aire inférieure et d'aire supérieure se resserre autour de la courbe.

```
>>> rectangle(1,2,10)
(2.1850000000000014, 2.4850000000000017)
>>> rectangle(1,2,50)
(2.3034000000000017, 2.3634000000000017)
>>> rectangle(1,2,100)
(2.318350000000003, 2.3483500000000026)
>>>
```

On vérifie avec un logiciel de calcul formel.

$$\int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{2} x^2 dx = \frac{7}{3} \approx 2,333$$

Remarque

Cet algorithme ne permet pas d'arriver rapidement au résultat. Les algorithmes utilisés dans les calculatrices sont bien plus performants.

Calculer une intégrale avec la calculatrice
🖥️ **Vidéo TI https://youtu.be/0Y3VT73yvVY**
🖥️ **Vidéo Casio https://youtu.be/hHxmizmbY_k**
🖥️ **Vidéo HP https://youtu.be/4Uu5tQGjbwo**

II. Intégrales et primitives

Comment concrètement calculer une intégrale sans passer par une valeur approchée ? La réponse à cette question est amenée avec la notion de primitive vue précédemment.

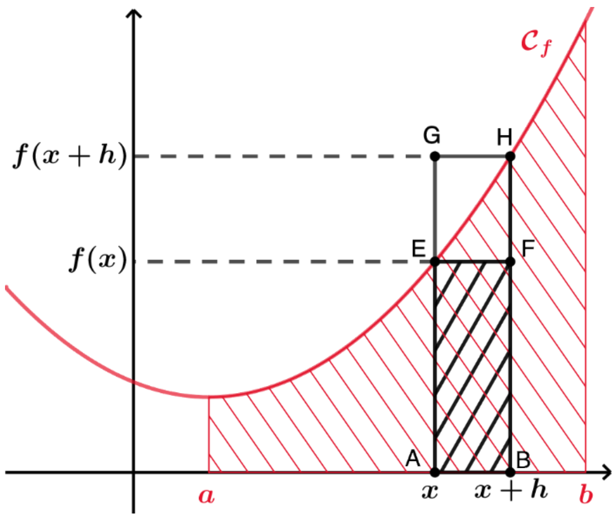
1. Fonction définie par une intégrale

Théorème 1
Soient $a, b \in R$. Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$. La fonction F définie sur $[a; b]$ par
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
est dérivable sur $[a; b]$ et sa dérivée est la fonction f

Démonstration dans le cas où f est strictement croissante

- On considère deux réels x et $x + h$ de l'intervalle $[a; b]$ où $h > 0$.

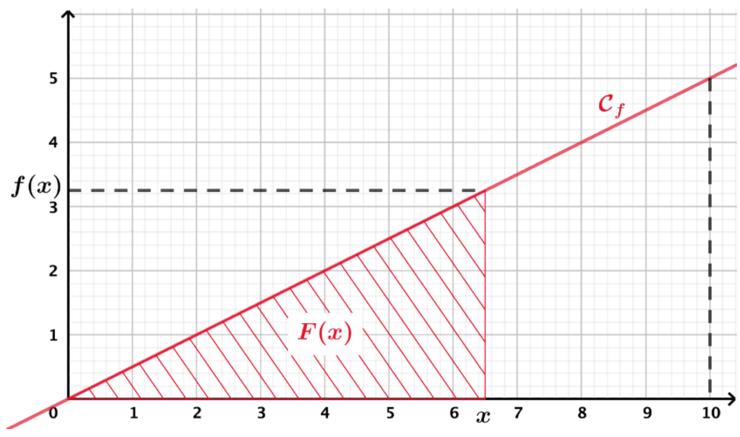
On veut démontrer que
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$
$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$
On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction f. Cette différence est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG. f est croissante sur $[a ; b]$ donc
$$A(ABFE) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq A(ABHG)$$
$$h \times f(x) \leq F(x + h) - F(x) \leq h \times f(x + h)$$
$$f(x) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x + h)$$
D'après le théorème des gendarmes,
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$



- Dans le cas où $h < 0$, la démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

On en déduit que $F'(x) = f(x)$

Méthode
Étudier une fonction définie par une intégrale
🖥️ **Vidéo TI https://youtu.be/6DHXw5TRzN4**
Soit F la fonction définie sur $[0; 10]$ par
$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt$$
a. Étudier les variations de F.
b. Tracer sa courbe représentative.
Solution
a. La fonction $t \longmapsto \frac{t}{2}$ est continue et positive sur $[0; 10]$ donc F est dérivable sur $[0; 10]$ et
$$\forall x \in [0; 10],\ F'(x) = \frac{x}{2} \geq 0$$
Donc F est croissante sur $[0; 10]$. On dresse le tableau de variations.



x	0 $\qquad\qquad\qquad$ 10
$F'(x)$	$+$
F	$0 \nearrow 25$

$F(x)$ est égal à l'aire du triangle rouge. Ainsi

$$F(10) = \frac{10\times5}{2} = 25\ u.a.$$

b. On calcule l'expression de la fonction F.

$$\forall x\in[0;10],\ F(x) = \frac{x\times\frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}\ u.a.$$

On obtient ainsi la représentation graphique de F

II. Primitive d'une fonction continue

1. Définition

Exemple

On considère les fonctions suivantes.

$f:\ R\longrightarrow R \quad et \quad F:\ R\longrightarrow R$ $\quad x\longmapsto 2x+3 \qquad x\longmapsto x^2+3x-1$

On constate que F est dérivable sur R et $\qquad \forall x\in R,\ F'(x) = 2x+3 = f(x)$

On dit dans ce cas que F est une **primitive** de f sur R.

Définition 1

f est une fonction continue sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que

$$F' = f$$

Remarques

- Dans ces conditions, on a l'équivalence « F admet pour dérivée f » et « f admet pour primitive F ».
- Certaines fonctions n'admettent aucune primitive qui s'exprime avec des fonctions usuelles. La fonction définie sur R par $f(x) = e^{-x^2}$ est dans ce cas de figure.
- Si une fonction f admet une primitive, elle en admet une **infinité**. En effet, si F désigne une primitive de f, $F + k$ où k désigne une constante réelle est aussi une **primitive** de la fonction f. Ce sont d'ailleurs les seules primitives de la fonction f. Ainsi, si F et G désignent deux primitives de f, alors $F - G$ est constante (puisque de dérivée nulle).

Exemple

La fonction F définie sur R par $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de la fonction f définie sur R par $f(x) = x$. En effet,

$$\forall x\in R,\ F'(x) = f(x)$$

2. Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle de définition
$f(x) = a,\ a\in R$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ n\in Z\backslash\{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\{R\ si\ n\geq 0\ R^*\ si\ n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x^n},\ n\in N^*$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\{R\ si\ n\geq 0\ R^*\ si\ n < 0$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[= R_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln ln\ x$	$]0; +\infty[= R_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln ln\ \|x\| = \{\ln ln\ x\ si\ x > 0\ \ln$	R^*
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln ln\ x$	$F(x) = x\times \ln ln\ (x) - x$	$]0; +\infty[= R_+^*$
$f(x) = \cos cos\ x$	$F(x) = \sin sin\ x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin sin\ x$	$F(x) = -\cos cos\ x$	$\mathbb{R}$

Remarques

- La formule en noir est un cas particulier de la précédente (il suffit de remplacer n par $-n$).
- Les formules en vert ne sont pas au programme mais rudement pratiques…
- Toutes ces formules se déduisent se déduisent des règles usuelles de dérivation.

3. Linéarité des primitives

Propriété 1

f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$. Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a; b]$ alors $F + G$ **est une primitive de** $f + g$ et, si k est un nombre réel, kF **est une primitive de** kf.

Démonstration

- $(F + G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = kF' = kf$

4. Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n,\ n\in Z\backslash\{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n < 0$, la fonction doit être non nulle sur I $\forall x\in I, u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$\frac{u'}{u}$	$l\|u\|$	$u\neq 0$ (u ne s'annule par sur I)
$u'e^u$	e^u	
$u'\cos cos\ u$	$\sin sin\ u$	
$u'\sin sin\ u$	$-\cos cos\ u$	

Méthode

Recherche de primitives

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/GA6jMgLd_Cw**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/82HYI4xuClw**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ**

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/iiq6eUQee9g**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/V_lI9zvvtAk**

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a. $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = R$

b. $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3}$ sur $I =]0; +\infty[$

c. $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$ sur $I = R$

d. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I = R$

e. $f(x) = \frac{3x}{x^2+2}$ sur $I = R$

f. $f(x) = xe^{x^2}$ sur $I = R$

g. $f(x) = \cos\cos(2x) - 3\sin\sin(3x - 1)$ sur $I = R$

Solution

Soit $x \in I$,

a. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$

b. $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} = 3x^2 - 3x^{-3}$ donc $F(x) = x^3 - 3\times\frac{1}{-2}x^{-2} = x^3 + \frac{3}{2x^2}$

c. $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$ du type $u'u^n$ avec $u(x) = x^2 - 5x + 4$ donc $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 4)^3$

d. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ donc $F(x) = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$

e. $f(x) = \frac{3x}{x^2+2} = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{x^2+2}$ du type $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 2$ donc $F(x) = \frac{3}{2}\ln ln\left(x^2 + 2\right)$

f. $f(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2}\times 2xe^{x^2}$ du type $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$ donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

g. $f(x) = \frac{1}{2}\times 2\cos\cos(2x) - 3\sin\sin(3x - 1)$ donc $F(x) = \frac{1}{2}\sin\sin(2x) + \cos\cos(3x - 1)$

Propriété 2

f est une fonction continue sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel k, la fonction $F + k$ est une primitive de f sur I.

Démonstration

F est une primitive de f. On pose $G(x) = F(x) + k$

$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$

Donc G est une primitive de f.

Propriété 3

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Admis -

Remarque

Bien que l'existence en soit assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue (ou utilisée…).

Par exemple, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite. En fait, cette primitive égale

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \times erfi(x)$$

Où la fonction erfi désigne la fonction d'erreur imaginaire. Elle a été inventée pour combler le vide de cette fonction. La primitive de cette fonction n'a d'ailleurs pas de nom… pour l'instant !

Méthode

Recherche d'une primitive particulière

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/-q9M7oJ9gkI**

Soit la fonction f définie sur R^* par $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

1. *Démontrer que la fonction F définie sur R^* par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f.*

2. Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

Solution

1. La fonction F est une primitive de f si $F' = f$. F est dérivable sur R^* en tant que quotient d'une fonction dérivable sur R^* et d'une fonction dérivable et qui ne s'annule pas sur R^*.

$\forall x \in R^*$, $F'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} = f(x)$

2. Toutes les primitives de f sont de la forme $G = F + k$ où k est un nombre réel.
On cherche la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$, soit

$$G(1) = 0 \Leftrightarrow F(1) + k = 0 \Leftrightarrow e^2 + k = 0 \Leftrightarrow k = -e^2$$

La primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$ est la fonction G telle que

$$\forall x \in R^*, G(x) = F(x) - e^2 = \frac{e^{2x}}{x} - e^2$$

III. Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

1. Définition

Propriété 4
Soient $a, b \in R$. Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$. Si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Démonstration

La dérivée de la fonction G définie sur $[a; b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la fonction f.

Donc G est une primitive de f sur $[a; b]$. Si F est une primitive de f alors il existe un réel k tel que

$$\forall x \in [a; b],\ G(x) = F(x) + k$$

Donc

$$G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + k \Leftrightarrow k = -F(a)$$

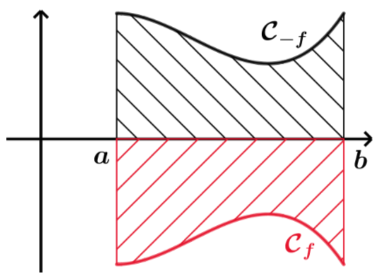
$$G(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) + k = F(b) - F(a)$$

Définition 2
Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels de l'intervalle I et F une primitive de f sur $[a; b]$. On appelle **intégrale de f sur** $[a; b]$ la différence $F(b) - F(a)$ noté $\int_a^b f(x)dx$

Remarque
La définition peut être étendue à des fonctions de signe quelconque. Ainsi pour une fonction f négative sur $[a; b]$, on peut écrire, si G désigne une primitive de la fonction $-f$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(G(b) - G(a)) = -\int_a^b (-f(x))dx$$

Dans ce cas, l'intégrale de la fonction f sur $[a; b]$ est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f sur $[a; b]$.



Notations

On écrit $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Méthode
Calculer une intégrale à partir d'une primitive
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/Z3vKJJE57Uw**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/8ci1RrNH1L0**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/uVMRZSmYcQE**
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/BhrCsm5HaxQ**

Calculer $A = \int_2^5 \left(3x^2 + 4x - 5\right)dx$ $B = \int_{-1}^1 e^{-2x}dx$ $C = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+3}dx$

Solution

$$A = \int_{2}^{5}\left(3x^2 + 4x - 5\right)dx = \left[x^3 + 2x^2 - 5\right]_2^5 = 5^3 + 2\times5^2 - 5\times5 - \left(2^3 + 2\times2^2 - 5\times2\right) = 150 - 6 = 144$$

$$B = \int_{-1}^{1} e^{-2x}dx = \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{-2}e^{-2\times1} - \frac{1}{-2}e^{-2\times(-1)} = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^{-2}\right) = \sinh sinh\,(2)$$

$$C = \int_{0}^{1}\frac{e^x}{e^x+3}dx = \left[\ln ln\left(e^x + 3\right)\right]_0^1 = \ln ln\left(e^1 + 3\right) - \ln ln\left(e^0 + 3\right) = \ln ln\left(\frac{e+3}{4}\right)$$

Propriété 5

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et deux réels a et b de l'intervalle I.

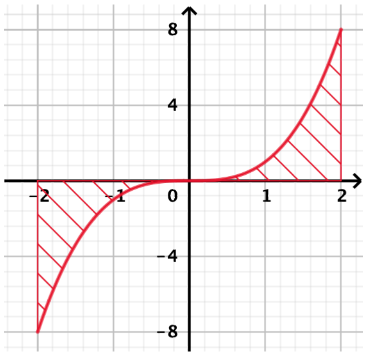
$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$$

$$\int_{b}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Démonstration

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_{b}^{a} f(x)dx = F(a) - F(b) = -\left(F(b) - F(a)\right) = -\int_{a}^{b} f(x)dx$$



Remarque

Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.
Par exemple,

$$B = \int_{-2}^{2} x^3dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\times 2^4 - \frac{1}{4}(-2)^4 = 4 - 4 = 0$$

2. Relation de Chasles

Propriété 6

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et trois réels a, b et c de l'intervalle I.

$$\int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Démonstration

$$\int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

3. Linéarité

Propriété 7

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et deux réels a et b de l'intervalle I.

$$\forall k\in R, \int_{a}^{b} kf(x)dx = k\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{b}\left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{b} g(x)dx$$

Démonstration

On applique les propriétés sur les primitives. kF est une primitive de kf. $F + G$ est une primitive de $f + g$.

Méthode

Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/B9n_AArwjKw**

On pose $A = \int_{0}^{2\pi} x\,dx$ et $B = \int_{0}^{2\pi} x\,dx$

a. Calculer $A + B$ et $A - B$.

b. En déduire A et B.

Solution

a. On calcule en appliquant les formules de linéarité.

$$A + B = \int_0^{2\pi} x\,dx + \int_0^{2\pi} x\,dx = \int_0^{2\pi} (x + x)dx = \int_0^{2\pi} 1dx = [x]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

$$A - B = \int_0^{2\pi} (x - x)dx = \int_0^{2\pi} \cos \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin \sin 2x\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\sin \sin (2\times 2\pi) - \frac{1}{2}\sin \sin (2\times 0) = 0$$

b. On obtient le système suivant grâce à la question précédente.

$\{A + B = 2\pi\ A - B = 0 \Leftrightarrow \{2A = 2\pi\ A = B \Leftrightarrow A = B = \pi$

5. Inégalités

Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et deux réels a et b de l'intervalle I tels que

$$a \le b$$

$\forall x \in [a; b],\ f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$

$\forall x \in [a; b],\ f(x) \ge g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

Démonstration

Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive. Soit $x \in I$,

$f(x) \ge g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b (f(x) - g(x))dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \ge 0$ *par linéarité*

Donc $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

Méthode

Encadrer une intégrale

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/VK0PvzWBIso**

a. Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $[0; 1]$, $0 \le e^{x^2} \le e^x$

b. En déduire que $\quad 0 \le \int_0^1 e^{x^2} dx \le e - 1$

Solution

a. $\forall x \in [0; 1],\ x^2 \le x$

Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur R, on en déduit que

$$\forall x \in [0; 1],\ 0 \le e^{x^2} \le e^x$$

b. On déduit de la question précédente que

$\int_0^1 0dx \le \int_0^1 e^{x^2} dx \le \int_0^1 e^x dx \Rightarrow 0 \le \int_0^1 e^{x^2} dx \le \left[e^x\right]_0^1 \Rightarrow 0 \le \int_0^1 e^{x^2} dx \le e - 1$

IV. Aire délimitée par deux courbes

Méthode

Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/oRSAYNwUiHQ**

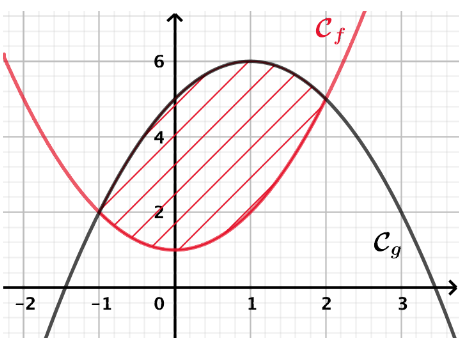
On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = -x^2 + 2x + 5$$

On admet que

$$\forall x \in [-1 ; 2],\ f(x) \le g(x)$$

Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.



Solution

On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de g et de l'aire sous la courbe représentative de f.
Cela revient à calculer la différence des intégrales

$$A = \int_{-1}^{2} g(x)dx - \int_{-1}^{2} f(x)dx$$

$I_g = \int_{-1}^{2} g(x)dx = \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x\right]_{-1}^{2}$

$I_g = \ -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + 5\times2 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 5\times(-1)\right) = 15$

$I_f = \int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} x^2 + 1\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\times2^3 + 2 - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)\right) = 6$

Donc

$$A = I_g - I_f = 15 - 6 = 9\ u.a.$$

Remarque
Une autre méthode, un peu plus rapide, consisterait à utiliser la linéarité de l'intégrale.

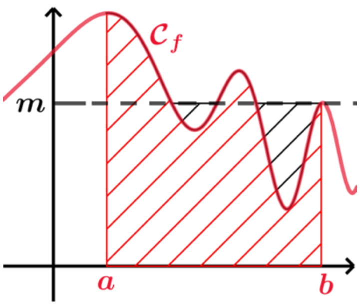
$A = \int_{-1}^{2} g(x)dx - \int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5dx - \int_{-1}^{2} x^2 + 1\,dx = \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5 - x^2 - 1\,dx$

$A = \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4\,dx = \ldots = 9$

V. Valeur moyenne d'une fonction

Définition 3
Soient $a, b \in R$ tel que $a \neq b$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$. On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ le nombre réel

$$m = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$$



Interprétation géométrique
L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-contre) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$

Exemple
Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

Solution

$m = \frac{1}{10-0}\int_{0}^{10} \left(3x^2 - 4x + 5\right)dx = \frac{1}{10}\left[x^3 - 2x^2 + 5x\right]_{0}^{10} = \frac{1}{10}(1\,000 - 200 + 50) = 85$

Méthode
Calculer une valeur moyenne d'une fonction
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/WzV_oLf1w6U**
On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie. Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à

$$f(x) = 16x^2 - x^3$$

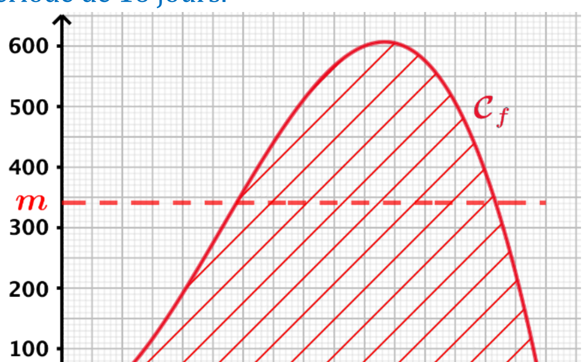
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

Solution

$m = \frac{1}{16-0}\int_{0}^{16} f(x)dx = \frac{1}{16}\int_{0}^{16}\left(16x^2 - x^3\right)dx$

$m = \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{16}$

$m = \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3} \times 16^3 - \frac{1}{4} \times 16^4\right)$



$m = \frac{1\,024}{3} \approx 341$

Le nombre moyen de malades chaque jour est d'environ **341**.

VI. Intégration par parties

Théorème 2 (intégration par parties)

Soient $a, b \in R$. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ et de dérivées continues sur $[a; b]$

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Démonstration au programme

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/v3TdIdu0sgk**

uv est dérivable sur $[a\,;b]$ et on a : $(uv)' = u'v + uv'$

Les fonctions uv', $u'v$ et $(uv)'$ sont continues sur $[a\,;b]$, donc :

$$\begin{aligned}[u(x)v(x)]_a^b &= \int_a^b (uv)'(x)dx \\ &= \int_a^b \left(u'v + uv'\right)(x)dx \\ &= \int_a^b (u'v)(x)dx + \int_a^b (uv')(x)dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Méthode

Calculer une intégrale en intégrant par parties

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/uNIpYeaNfsg**

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/vNQeSEb2mj8**

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/xbb3vnzF3EA**

Calculer les intégrales suivantes.

$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin \sin x \, dx$ $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos \cos x \, dx$ $C = \int_1^{e^2} \ln \ln x \, dx$

Solution

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{v} \underbrace{\sin \sin x}_{u'} dx$$

Ce choix n'est pas anodin ! L'idée est ici de ne plus laisser de facteur x dans l'expression qu'il restera à intégrer. Il faudrait donc dériver x. On pose, soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$v(x) = x \quad v'(x) = 1 \quad u'(x) = \sin \sin x \quad u(x) = -\cos \cos x$$

Ainsi, en intégrant par parties, on obtient

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)\, v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)dx = [-\cos \cos (x) \times x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos \cos (x) \times 1 dx$$

$$A = [-x \cos \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \cos \cos \frac{\pi}{2} + 0 \times \cos \cos 0 + [\sin \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \sin \frac{\pi}{2} - \sin \sin 0 = 1$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{\cos \cos x}_{u'} dx$$

On pose, soit $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$v(x)=x^2\ v'(x)=2x\ u'(x)=\cos\cos x\ \ u(x)=\sin\sin x$$

Ainsi, en intégrant par parties, on obtient

$$B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)\ v(x)dx=[u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}u(x)v'(x)dx=\left[\sin\sin(x)\ \times x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\sin(x)\times 2xdx$$

$$B=\left[x^2\sin\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin\sin x\,dx$$

Or, dans le terme de droite, on reconnait l'intégrale A de la question précédente qui a été calculée par parties. Il s'agit ici d'une **double intégration par parties**. On en déduit que

$$B=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\sin\frac{\pi}{2}\ -0^2\sin\sin 0\ -2\times1=\frac{\pi^2}{4}-2$$

$$C=\int_1^{e^2}\underbrace{1}_{u'}\times\underbrace{\ln ln\,x}_{v}dx$$

On pose, soit $x\in\left[1;e^2\right]$

$$v(x)=\ln ln\,x\ \ v'(x)=\frac{1}{x}\ \ u'(x)=1\ \ u(x)=x$$

Ainsi, en intégrant par parties, on obtient

$$C=\int_1^{e^2}(x)\ v(x)dx=[u(x)v(x)]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}u(x)v'(x)dx=[x\ln ln\,x\,]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\times\frac{1}{x}dx$$

$$C=e^2\ln ln\,e^2\ -1\ln ln\,1\ -\int_1^{e^2}1dx=e^2\times2\ln ln\,e\ -[x]_1^{e^2}=e^2\times2-e^2+1=e^2+1$$

On peut aussi remarquer plus directement que (la primitive de ln n'étant cependant pas au programme)

$$C=[x\ln ln\,(x)\ -x]_1^{e^2}=e^2\ln ln\,e^2\ -e^2-(1\times\ln ln\,1\ -1)=2e^2-e^2-0+1=e^2+1$$

VI. Intégrales et suites

Méthode

Étudier une suite d'intégrales

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/8I0jA4lClKM**

On considère la suite d'intégrales $\left(I_n\right)$ définie pour tout entier n par

$$I_n=\int_1^e x\,(\ln ln\,x\,)^n dx$$

1. Calculer I_0

2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall n\in N,\ I_{n+1}=\frac{e^2}{2}-\frac{n+1}{2}I_n$$

3. À l'aide d'un programme écrit en Python, conjecturer la limite de la suite $\left(I_n\right)$.

4. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. En déduire que la suite est convergente et converge nécessairement vers 0.

Solution

1. Soit $n=0$,

$$I_0=\int_1^e x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}1^2=\frac{e^2-1}{2}$$

2. Soit $n\in N$. L'objectif est d'exprimer I_{n+1} en fonction de I_n

$$I_{n+1} = \int_1^e \underbrace{x}_{u'} \times \underbrace{(\ln ln\, x)^{n+1}}_{v} dx$$

On pose, soit $x \in [1; e]$,

$$v(x) = (\ln ln\, x)^{n+1} \quad v'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln ln\, x)^n \quad u'(x) = x \quad u(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Ainsi, en intégrant par parties, on obtient

$$I_{n+1} = \int_1^e (x)\, v(x)dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2(\ln ln\, x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2(n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln ln\, x)^n dx$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2}e^2(\ln ln\, e)^{n+1} - \frac{1}{2}\times 1^2(\ln ln\, 1)^{n+1} - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln ln\, x)^n dx = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n$$

3. On conjecture que

$$I_n = +\infty$$

4. Montrons que la suite (I_n) est positive et décroissante. Soit $n \in N$,

$$\forall x \in [1; e],\ 0 \le \ln ln\,(x) \le 1$$

Donc,

$$\forall x \in [1; e],\ 0 \le x(\ln ln\, x)^{n+1} \le x(\ln ln\, x)^n \le x$$

```python
from math import*

def integ(n):
    I=(e**2-1)/2
    for k in range(1,n+1):
        I=e**2/2-k*I/2
    return I
```

```
>>> integ(5)
0.951367987633668
>>> integ(10)
0.5748317309902866
>>> integ(30)
39275840.04973485
>>> integ(100)
1.170494462774085e+112
```

On en déduit, par comparaison d'intégrales, que

$$\int_1^e 0dx \le \int_1^e x(\ln ln\, x)^{n+1}dx \le \int_1^e x(\ln ln\, x)^n dx \le \int_1^e x\, dx \Leftrightarrow 0 \le I_{n+1} \le I_n \le \frac{e^2-1}{2}$$

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 et donc, par convergence monotone, elle est **convergente** vers une limite finie l. La suite (I_{n+1}) converge vers l donc, par somme des limites, la suite $\left(\frac{n+1}{2}I_n\right)$ converge nécessairement, ce qui n'est possible que si $l = 0$. Donc

$$I_n = 0$$

La conjecture est donc fausse et liée à l'approximation des calculs effectués par Python.

Remarque

En remplaçant, e**2 par exp(2) dans le programme, on obtient des valeurs légèrement différentes mais tout aussi aberrantes lorsque n grandit ($-2,05\times 10^{112}$ pour $n = 100$…)