

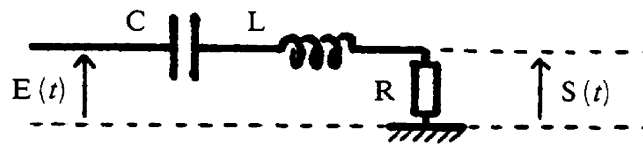
CONCOURS SPECIAL T' 1995
PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE
DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 4
L'usage des calculatrices est autorisé

Les deux parties sont indépendantes. Elles présentent divers aspects de la réponse d'un système à une excitation périodique : la première partie envisage le cas d'un système linéaire en électricité, la seconde partie s'intéresse à un système non linéaire en mécanique.

PREMIÈRE PARTIE

FILTRE RLC SÉRIE

Pour le filtre RLC dessiné ci-après, on note $E(t)$ la tension imposée à l'entrée et $S(t)$ la tension de sortie.



1. Régime sinusoïdal forcé.

- a. Mettre la fonction de transfert sous la forme ci-après (en précisant les expressions de Q et ω_0 en fonction de R , L et C) :

$$H(j\omega) = \frac{S}{E} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

- b. Quelles valeurs numériques faut-il donner à L et à C afin d'obtenir un filtre pour lequel $Q = 200$ et $\omega_0 = 4 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$, lorsque $R = 10 \, \Omega$?
- c. Sachant que les valeurs de R , L et C ne sont connues qu'avec une précision relative de $5 \cdot 10^{-3}$ (0,5 %), quelles sont les précisions relatives qui caractérisent les valeurs de Q et ω_0 ?
- d. Evaluer numériquement $|H|$ pour $\omega = \omega_0 \cdot 1,05$ et pour $\omega = \frac{\omega_0}{1,05}$.
- e. Esquisser de façon approximative la courbe présentant $\log |H|$ en ordonnées et $\log \frac{\omega}{\omega_0}$ en abscisses.

On précisera essentiellement l'axe de symétrie et les points d'intersection des asymptotes avec les axes des abscisses et des ordonnées.

- f. Décrire en une phrase le comportement de ce filtre en régime sinusoïdal.
A quelles conditions peut-on le considérer comme un montage intégrateur ?
A quelles conditions peut-on le considérer comme un montage dérivateur ?

2. Régime impulsionnel.

- a. Expliciter l'équation différentielle reliant $S(t)$ à $E(t)$ dans le cas général où $E(t)$ n'est pas forcément une fonction sinusoïdale.
- b. Dans le cas où $E(t)$ est nulle, montrer que l'imprécision qui affecte ω_0 (question 1.c.) autorise l'écriture de la solution de l'équation précédente sous la forme : $S(t) \approx \left(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \right) \cdot \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)$.
- c. On suppose que la tension d'entrée présente, à la date t_0 , une discontinuité : $E(t_0^+) - E(t_0^-) = \Delta E$ (voir figure 1). Montrer qu'alors :
- le signal de sortie $S(t)$ est continu à la date t_0 ;
 - La dérivée du signal de sortie présente une discontinuité égale à : $\frac{dS}{dt}(t_0^+) - \frac{dS}{dt}(t_0^-) = \frac{\omega_0}{Q} \Delta E$.

d. La tension d'entrée est un créneau d'amplitude E_0 et de durée θ , inférieure à $\frac{p}{w_0}$ (voir figure 2).

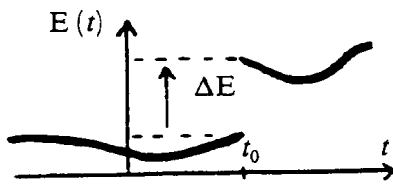


Figure 1

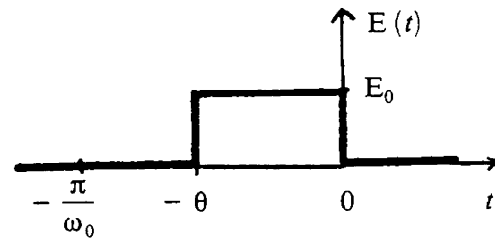


Figure 2

- i. Pour t compris entre $(-\theta)$ et 0 , montrer que l'on peut négliger le terme d'atténuation exponentielle (une argumentation chiffrée est attendue). Préciser, dans cette approximation, le signal $S(t)$ (en fonction de $(t + \theta)$, E_0 , ω_0 et Q).
- ii. Quelles sont les valeurs de $S(t)$ et de sa dérivée juste après l'instant zéro ? Dans la suite, on admettra que, pour t positif, les calculs conduisent à : $S(t) = \frac{2E_0}{Q} \cdot \sin \frac{w_0 q}{2} \cdot \cos \left(w_0 t + \frac{w_0 q}{2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{w_0 t}{2Q} \right)$.
- iii. Dans le cas où θ tend vers zéro pendant que le produit $(\theta \times E_0)$ reste constant, $S(t)$, pour t positif, se met sous la forme : $S(t) = (qE_0)'s(t)$.

Expliciter $s(t)$ en fonction de t , ω_0 et Q . [$s(t)$ est la réponse du filtre à une impulsion unité.]

e. Expliquer pourquoi la solution générale de l'équation différentielle établie à la question 2.a. peut s'écrire (en considérant bien sûr : $s(t < 0) = 0$) : $S(t) = \int E(t_0) \cdot s(t - t_0) \cdot dt_0$.

En déduire, sans calcul, la valeur de : $\left[e^{-j\omega t} \int e^{j\omega t_0} \cdot s(t - t_0) \cdot dt_0 \right]$.

3. Réponse à un signal en créneaux.

Les questions suivantes concernent un signal d'entrée en créneaux, de période T (figure 3).

On choisira pour chaque cas (c, d, e et f) le point de vue le plus pratique : celui de la partie 1 ou celui de la partie 2.

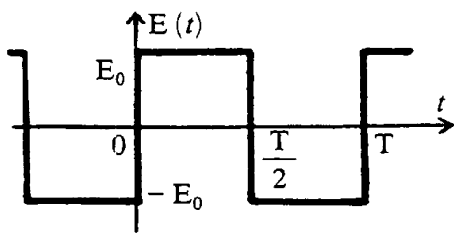


Figure 3

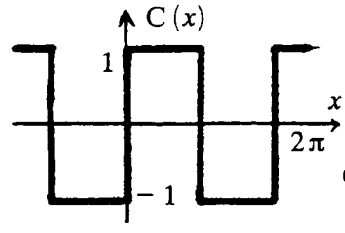


Figure 4

$$C(x) = \frac{4}{p} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}$$

- a. Expliquer pourquoi le signal $S(t)$ présente lui aussi la période T .
- b. Donner la décomposition en série de Fourier du signal $E(t)$ (utiliser la formule de la figure 4).
- c. Lorsque T est égal à $\frac{2p}{w_0}$, préciser le signal de sortie dans le cadre des approximations utilisées précédemment.
- d. Lorsque T est supérieur à $\frac{2p}{w_0}$ et reste franchement inférieur à $\frac{2pQ}{w_0}$, le signal de sortie ne prend des valeurs notablement différentes de zéro qu'autour de valeurs particulières de T que l'on précisera.. Evaluer alors en fonction de T , ω_0 et E la période et l'amplitude du signal de sortie.

Pourquoi l'énoncé propose-t-il de se limiter au cas où T reste franchement inférieur à $\frac{2pQ}{w_0}$?

e. Lorsque T est très grand devant $\frac{2pQ}{w_0}$, calculer le signal de sortie pour t compris entre 0 et $T/2$.

Donner la réponse en fonction de E_0 , Q , ω_0 et t .

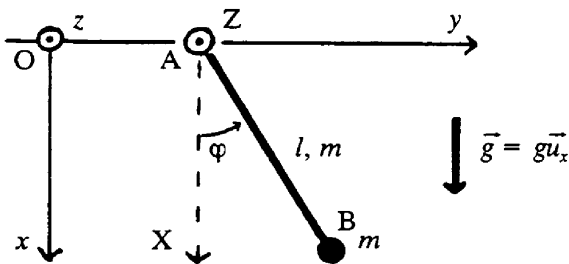
f. Lorsque T est très petit devant $\frac{2p}{w_0}$, quelle est la forme du signal de sortie ? Evaluer son amplitude en fonction de E_0 , Q , ω_0 et T .

DEUXIÈME PARTIE

STABILITÉ DANS UN CHAMP A FLUCTUATIONS RAPIDES

A. Pendule dont l'axe vibre.

Une barre homogène AB (longueur l , masse m) peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal AZ . La barre reste en permanence dans le plan vertical Oxy . On note ϕ l'angle entre l'axe vertical AX et la barre. Le référentiel $Oxyz$ est galiléen. Un dispositif non représenté sur la figure impose à l'axe AZ un mouvement de translation parallèlement à Oy . Une masselotte assimilée à un point matériel de masse m , la même que celle de la barre, est fixée à l'extrémité B de celle-ci.



1. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe AZ du pendule formé par la barre et la masselotte.
2. Dans le cas où l'axe AZ est fixe, établir l'équation différentielle du second ordre dont ϕ est solution. Calculer la période des petites oscillations connaissant: $l = 10 \text{ cm}$ et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.
3. La position du point A est donnée par: $\vec{OA} = y(t) \cdot \vec{u}_y$. En se plaçant dans le référentiel $AXyZ$, établir l'équation différentielle du second ordre dont ϕ est solution.
4. Dans le cas où $y = y_0 \sin \omega t$, mettre l'équation précédente sous la forme :

$$(EA) : \frac{d^2 j}{dt^2} = -\alpha \sin j + \beta \cos j \sin \omega t.$$

(α et β étant des constantes à exprimer en fonction de g , l , ω et y_0).

B. Etude théorique.

Un point matériel de masse unité, libre de se déplacer sur un axe Ox , est soumis à deux forces : l'une $F(x)$ ne dépend que de la position, l'autre varie sinusoïdalement dans le temps avec une pulsation ω très élevée et une amplitude $f(x)$. La position du point vérifie alors l'équation différentielle :

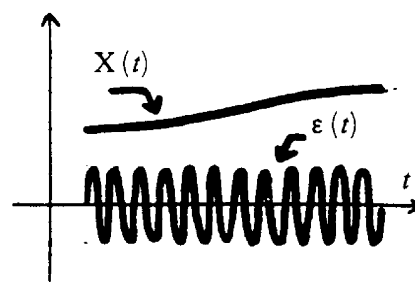
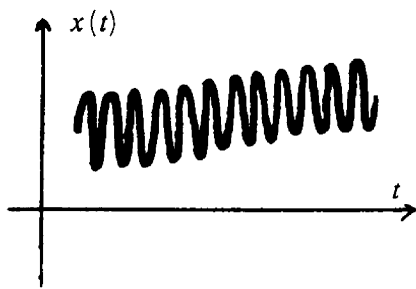
$$(E) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) + f(x) \sin \omega t$$

On cherche une solution approchée sous la forme $x(t) = X(t) + \epsilon(t)$.

· $\epsilon(t)$: fonction sinusoïdale de pulsation ω et de faible amplitude.

· $X(t)$: fonction qui varie lentement dans le temps, c'est-à-dire très peu sur une durée de l'ordre d'une période $\frac{2p}{w}$ de la fonction ϵ .

En écrivant les moyennes dans le temps sur une période $\frac{2p}{w}$, on a ainsi: $\langle x \rangle = X$ et $\langle \frac{d^2 x}{dt^2} \rangle = \frac{d^2 X}{dt^2}$



1. Remplacer x par $(X + \epsilon)$ dans l'équation E. Ensuite, en supposant ϵ suffisamment petit, approcher F et f par leur développement au premier ordre en ϵ autour de la valeur X . Noter E' l'équation obtenue.

2. Moyenner l'équation E' sur une période $\frac{2p}{w}$, durée pendant laquelle on peut considérer l'amplitude de ϵ comme constante.

Noter E'' cette nouvelle équation sans chercher, dans cette question, à expliciter le terme $\langle \epsilon \sin \omega t \rangle$.

3. Soustraire membre à membre les équations E' et E''. Expliciter la fonction sinusoïdale ϵ en supposant son amplitude constante, dans le cas où ω^2 est très grand devant $|F'|$ et $|f'|$.

4. En reportant dans E'' l'expression trouvée pour ϵ , montrer que X vérifie l'équation différentielle :

(EB) :
$$\frac{d^2 X}{dt^2} = F(X) - \frac{1}{4w^2} \frac{d}{dX} [f^2(X)] .$$

C. Stabilité des positions moyennes du pendule.

On applique au pendule étudié à la question A.4. la méthode de résolution de l'équation différentielle de la partie B. On note Φ ($= \langle \phi \rangle$) la valeur moyenne de l'angle ϕ sur une période de vibration $\frac{2p}{w}$ de l'axe AZ.

1. En utilisant les résultats de la partie B, établir l'équation différentielle vérifiée par Φ , en utilisant les grandeurs α , β et ω .

2. Comment se traduisent ici les hypothèses de travail introduites à la question B.1., puis à la question B.3. ?

3. Etudier la stabilité de la solution constante ($\Phi = 0$).

4. Etudier la stabilité de la solution constante non nulle Φ_0 ($0 < \Phi_0 < \pi$), quand celle-ci existe.

5. À quelle fréquence l'axe AZ doit-il vibrer pour que l'on observe une position moyenne stable égale à 45° pour Φ_0 ? Faire l'application numérique avec: $y_0 = 1$ cm; $I = 10$ cm et $g = 10$ m.s⁻².

Peut-on considérer comme satisfaites dans ce cas les conditions de validité obtenues à la question C.2. ?

