

Ознакомьтесь с теоретическим материалом.

Запишите пример в тетрадь.

Решите задания для самостоятельного решения.

Проверка на уроке.

Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x , искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается в следующем виде:

$$F(x, y, y') = 0,$$

$$F(x, y, y'') = 0,$$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой. Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$$

уравнение вида

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx ,$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0$$

Уравнение вида

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции от x , называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. В частном случае $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами. Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = uz$, где u и z — новые функции от x .

Пример:

Найти частное решение дифференцированного уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{2x^2} = \frac{dx}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Это дифференцированное уравнение с разделяющимися переменными.

Производим разделение переменных: $ydy = 2x^2 dx$

Интегрируя обе части равенства, получаем:

$$\begin{aligned} \int ydy &= \int 2x^2 dx \\ \frac{y^2}{2} &= \frac{2x^3}{3} + C \\ y^2 &= \frac{4}{3}x^3 + 2C \end{aligned}$$

Используя начальное условие, вычислим, соответствующее ему значение постоянное C :

$$\frac{4}{3} \cdot 0^3 + 2C = 2^2; 2C = 4; C = 2$$

Поэтому частное решение исходного дифференцированного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию, имеет вид:

$$y^2 = \frac{4}{3}x^3 + 4$$

Домашнее задание:

найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка:

$$1. \begin{cases} \frac{dy}{4x^3} = \frac{dx}{y} ; \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dy}{x} = \frac{dx}{y} ; \\ y(-2) = 4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2} ; \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} dy = 3x^2 dx ; \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} ydy = (x-1)dx ; \\ y(0) = 4 \end{cases}$$