Propiedades de los límites

Las **propiedades de los límites** son operaciones que se pueden emplear para simplificar el cálculo del límite de una función más compleja. Al tratarse de operaciones, también se le denomina **álgebra de los límites**.

Sean *f(x)* y *g(x)* dos funciones definidas en un mismo intervalo en donde está el valor *a* del límite y *k* una constante.

- **Unicidad del límite**: cuando el límite existe, el límite es único.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$$

- **Propiedad de la suma**: el límite de la suma es la suma de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

- **Propiedad de la resta**: el límite de la resta es la resta de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

- **Propiedad del producto**: el límite del producto es el producto de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

- **Propiedad de la función constante**: el límite de una función constante es esta misma constante.

$$\lim_{x\to a} k = k$$

- **Propiedad del factor constante**: en un límite de una constante multiplicada por una función se puede sacar la constante del límite sin que se afecte el resultado.

$$\lim_{x\to a}[k\cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

- **Propiedad del cociente**: el límite de un cociente de dos funciones es el cociente de los límites de las mismas.

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \;;$$
$$\text{siempre que } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

- **Propiedad de la función potencial**: el límite de una función potencial es la potencia del límite de la base elevado al exponente:

$$\lim_{x\to a}[f(x)^k] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^k$$

- **Propiedad de la función exponencial**: el límite de una función exponencial es la potencia de la base elevada al límite de la función exponente:

$$\lim_{x\to a}\left[k^{g(x)}\right] = k^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

- **Propiedad de la función potencial exponencial**: el límite de una función potencial exponencial, es la potencia de los límites de las dos funciones:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

- **Propiedad de la raíz**: el límite de una raíz, es la raíz del límite:

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

si el índice n es par, debe ser $\lim_{x\to a} f(x) > 0$

- **Propiedad de la función logarítmica**: El límite del logaritmo es el logaritmo del límite.

$$\lim_{x\to a}[log_k f(x)] = log_k\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

TALLER DE REFUERZO:

1) El valor de $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{6-2x}$ es:

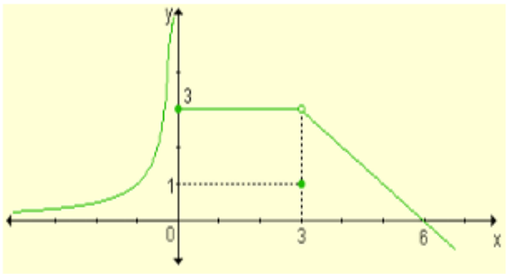
2) El valor de $\lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x^2-4}$ es:

3) El valor de la constante a para que $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2+2x-2x^3}{ax^3+x^2-6}$ sea 1 es:

4) El valor de $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sqrt{x}-1}$ es:

5) Sea la función f : R ® R / x ® $\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ 3-x & \text{si } 0\le x<4 \\ 2 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$ entonces el límite para x tendiendo a 4 es:

6) Sea la función y = f(x) dada gráficamente. Entonces:



a) No existen $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to 3} f(x)$

b) $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$

c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$ y f(3) = 1

d) $\lim_{x\to 6} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$

7) Sea la función f : R ® R / x ® $\begin{cases} 3+ax & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x=1 \\ 5 & \text{si } x>1 \end{cases}$. Para que exista el límite para x tendiendo a 1, el valor de a debe ser:

8) Sea la función f(x) = $-\frac{1}{x}$ entonces:

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

9) Si p(x) es un polinomio de grado 4 y q(x) es un polinomio de grado 6 entonces $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ es:

10) Dadas las funciones f(x) = $3x^2 + 4$ y g(x) = $5x^3 + 2$, el $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$ es:

11) Si $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to\frac{1}{2}} g(x) = 5$ entonces $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{g(x)}{f(x)}$ es:

a) $\frac{5}{4}$ **b)** $\frac{4}{5}$ **c)** 20 **d)** 1

12) Si $\lim_{x\to 0} f(x) = 27$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{3}$ entonces $\lim_{x\to 0} [f(x)]^{g(x)}$ es:

13) Si c es una constante $\lim_{x\to a} c$ es

14) Si $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 5$ entonces $\lim_{x\to a} [f(x) + 2g(x)]$ es:

15) La función f(x) tiene límite cuando x ® a si:

a) f(x) está definida en x = a

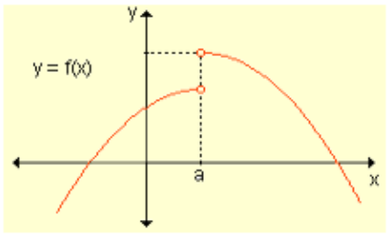
b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

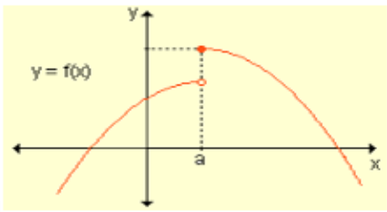
d) existen $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$

18) ¿En cuál de las siguientes gráficas f(a) no está definida pero existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

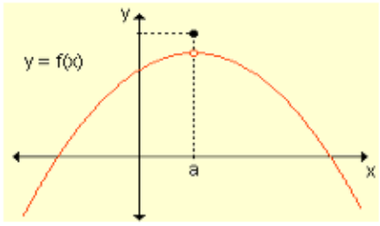
a)



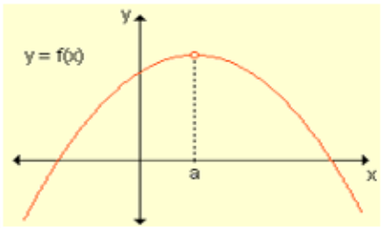
b)



c)

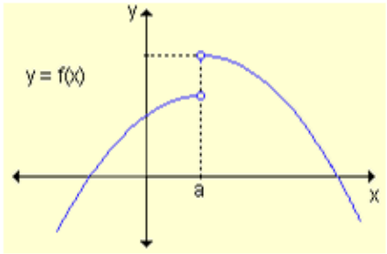


d)

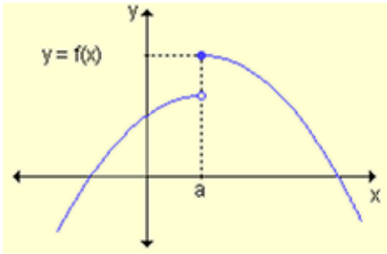


19) ¿En cuál de las siguientes gráficas f(a) está definida pero no existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

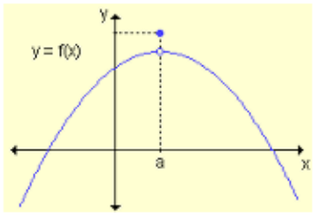
a)



b)



c)



d)

