



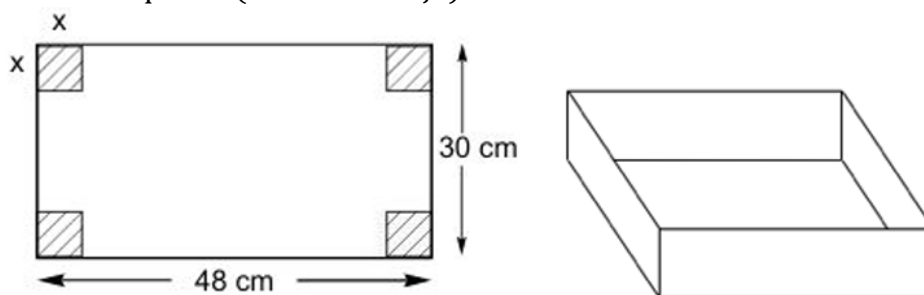
Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2024/2025

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 2, 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

EJERCICIO 1.

(2,5 PUNTOS) Para guardar el material escolar, se quiere construir una caja (sin tapa) a partir de una plancha de cartón de 48 cm de largo por 30 cm de ancho, a la que se le ha recortado un cuadrado de lado x en cada una de sus esquinas (véase el dibujo).



a) [0,75 puntos] Determina el volumen de la caja.

b) [1 punto] Determina las dimensiones de la caja si se quiere que contenga el mayor volumen posible.

Resolución

Volumen de la caja, a maximizar: $V(x) = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto} = (48 - 2x)(30 - 2x)x = 4x^3 - 156x^2 + 1440x$

Observa que debe ser $0 < x < 15$ para que se pueda construir la caja.

$$V'(x) = 12x^2 - 312x + 1440 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 26x + 120 = 0 ; x = \frac{26 \pm 14}{2}, x = 6, x = 20 > 15 \text{ (no válido)}$$

$$V''(x) = 24x - 312 ; V''(6) = 24 \cdot 6 - 312 = -168 < 0. \text{ El volumen máximo se obtiene para } x = 6.$$

Las dimensiones de la caja son: largo = $48 - 2 \cdot 6 = 36$ cm ancho = $30 - 2 \cdot 6 = 18$ cm alto = 2 cm

El volumen máximo será: $V = 36 \cdot 18 \cdot 2 = 1296 \text{ cm}^3$.

c) [0,75 puntos] Para poder trasportar la caja cómodamente, se van a realizar dos aberturas. El área de cada una de ellas está encerrada por las curvas $f(t) = t^2 - 4t$ y $g(t) = 2t - 5$. Calcula el área de una de las aberturas.

Resolución

Hallemos las abscisas de los puntos de corte de las curvas:

$$f(t) = t^2 - 4t, g(t) = 2t - 5 \Rightarrow t^2 - 4t = 2t - 5 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{6 \pm 4}{2}, t = 1, t = 5$$

$$\text{Área que piden: } A = \left| \int_1^5 [f(t) - g(t)] dt \right| = \left| \int_1^5 (t^2 - 6t + 5) dt \right|$$

Una primitiva de $(t^2 - 6t + 5)$ es $p(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 5t = \frac{t^3 - 9t^2 + 15t}{3}$. Por la regla de Barrow,

$$A = |p(5) - p(1)| = \left| \frac{5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15.5}{3} - \frac{1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15.1}{3} \right| = \left| \frac{-25}{3} - \frac{7}{3} \right| = \frac{32}{3} \cong 10,67 u^2$$

EJERCICIO 2.

Apartado a)

(2,5 PUNTOS) Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes:

Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo:

A(0, 1, -2), B(1, 2, 0), C(0, 0, 1) y D(1, 0, m), con $m \in \mathbb{R}$.

a.1) [1 punto] Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

Resolución

Como los puntos deben ser coplanarios, serán l.d. $\vec{AB} = (1, 1, 2)$, $\vec{AC} = (0, -1, 3)$ y $\vec{AD} = (1, -1, m + 2)$

Luego, $\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0 \Rightarrow |1 \ 1 \ 2 \ 0 \ -1 \ 3 \ 1 \ m + 2| = 0 \Rightarrow -m - 2 + 3 + 2 + 3 = 0$.
Por tanto, $m = 6$

a.2) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano π que contiene al toldo.

Resolución

Al ser $\vec{AB} = (1, 1, 2)$ y $\vec{AC} = (0, -1, 3)$ vectores directores del plano π que piden, un vector normal de π es $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5, -3, -1) // (-5, 3, 1)$

Y como π pasa por C(0, 0, 1), entonces $\pi: -5(x - 0) + 3(y - 0) + 1(z - 1) = 0 \Rightarrow \pi: -5x + 3y + z - 1 = 0$

a.3) [0,75 puntos] Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto P(1, 2, 3), ¿estará correctamente ubicado?

Resolución

Usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano: $d(P, \pi) = \frac{|-5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 - 1|}{\sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{35}} \cong 0,507 u$

Apartado b)

Resuelve los problemas siguientes:

b.1) [1 punto] Calcula la ecuación del plano π' que pasa por C(1, 1, -2), es paralelo a la recta r que pasa por los puntos A(1, 0, 3) y B(0, 4, -1) y perpendicular al plano $\pi: -x + y + 2z = 1$.

Resolución

Al ser el vector director de r, $\vec{d}_r = \vec{AB} = (-1, 4, -4)$ y el vector normal de π , $\vec{n}_\pi = (-1, 1, 2)$, vectores directores del plano α que piden, un vector normal de α es $\vec{n}_\alpha = \vec{d}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (12, 6, 3) // (4, 2, 1)$

Y como α pasa por C(1, 1, -2), entonces $\alpha: 4(x - 1) + 2(y - 1) + 1(z + 2) = 0 \Rightarrow \alpha: 4x + 2y + z - 4 = 0$

b.2) [1,5 puntos] Determina los valores reales de $m \in \mathbb{R}$, para que los puntos A(-1, 2, 3), B(-1, 0, -1), C(2, -1, 1) y D(2, 3, m), formen un tetraedro de volumen 8 unidades cúbicas.

Resolución

$$8 = V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} V_{\text{paralelepípedo}}(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| =$$

$$8 = \frac{1}{6} |\det \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & m-3 \end{pmatrix}| = \frac{1}{6} |12 - 12 - 36 + 6m - 18| = \frac{|6m - 54|}{6}; |6m - 54| = 48.$$

Luego, $6m - 54 = 48 \rightarrow m = 17$ ó $6m - 54 = -48 \rightarrow m = 1$. Conclusión: debe ser $m = 17$ ó $m = 1$

EJERCICIO 3. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

a.1) [1,5 puntos] Discute la resolución del sistema según los valores que pueda tomar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ e indica el número de soluciones en cada caso.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 2 & 0 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 4 & 2 & 0 & a & a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 - 4 + 2a - 4 = 2a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3$, $\det A \neq 0$ y $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

- Si $a = 3$, $\det A = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $|1 \ 1 \ 4 \ 2| = -2 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f_1 - f_2 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 2 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f_3 = f_2 \\ f_3 = f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 2 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $|1 \ 1 \ 0 \ 2| = 2 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

a.2) [1 punto] Para $a = 0$, resuelve el sistema de ecuaciones, de forma razonada.

Resolución

Si $a = 0$, sabemos que el sistema tiene solución única. Hallémosla por Gauss: La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f_3 + f_1 \\ f_2 - f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f_2 - f_3 \\ f_2 - f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

y corresponde al sistema $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2(-1) + y = 0 \\ y = 2 \end{matrix}$;

$$z = x + y - 2 = -1 + 2 - 2 = -1 ; \text{ Solución: } x = -1, y = 2, z = -1$$

Apartado b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$

b.1) [1,25 puntos] Calcula los valores del parámetro a para que AB sea invertible. Justifica tu respuesta.

Resolución

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & a & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 1 & 2a + 3 & 1 - a & 1 \end{pmatrix} ; \det C = 2a + 1 - 2a - 3 + 2a^2 + 3a =$$

$$\det C = 2a^2 + 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm 5}{4}, a = -2, a = \frac{1}{2}. \text{ Por tanto, } C = AB \text{ es invertible si } a \neq -2, a \neq \frac{1}{2}$$

b.2) [1,25 puntos] Calcula la inversa de AB en función de a .

Resolución

$$C = AB = \begin{pmatrix} 2a + 1 & 2a + 3 & 1 - a & 1 \end{pmatrix} ; \det C = 2a^2 + 3a - 2 = (a + 2)(2a - 1), \text{ Si } a \neq -2, a \neq \frac{1}{2} \exists C^{-1}.$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} (\text{adj } C)^t = \frac{1}{(a+2)(2a-1)} \begin{pmatrix} 1 & a - 1 & -2a - 3 & 2a + 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{(a+2)(2a-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2a - 3 & a - 1 & 2a + 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve solo uno de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En la entrada del instituto hay tres fotocopiadoras A, B y C cuyos porcentajes de fallos

son 3%, 5% y 4%, respectivamente. Un estudiante entra en el instituto y, como las tres fotocopadoras están libres, elige una al azar.

a.1) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que fotocopie sin fallos?

a.2) [1,5 puntos] Si al fotocopiar observa que una página es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que se haya utilizado la fotocopadora B?

Resolución

A = elegir la fotocopadora A B = elegir la fotocopadora B C = elegir la fotocopadora C F = fallar

Según el enunciado, $p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{3}$ $p(F/A) = 0,03$ $p(F/B) = 0,05$ $p(F/C) = 0,04$

a.1) Usando el teorema de probabilidad total $p(F) = p(A)p(F/A) + p(B)p(F/B) + p(C)p(F/C)$

Sustituyendo, $p(F) = \frac{1}{3} 0,03 + \frac{1}{3} 0,05 + \frac{1}{3} 0,04 = \frac{1}{3} 0,12 = \frac{1}{3} \frac{3}{25} = \frac{1}{25}$

Luego, la probabilidad que nos piden es $p(F^c) = 1 - p(F) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} = 0,96 = 96\%$

a.2) Pide $p(B/F)$, que usando el teorema de Bayes es

$$p\left(\frac{B}{F}\right) = \frac{p(B \cap F)}{p(F)} = \frac{p(B) p(F/B)}{p(F)} = \frac{\frac{1}{3} 0,05}{\frac{1}{25}} = \frac{\frac{5}{60}}{\frac{1}{25}} = \frac{5}{12} \cong 0,4167 = 41,67\%$$

Apartado b) Una inspectora de sanidad sabe que el 5% de los restaurantes no pasará una inspección. Si elige 8 restaurantes al azar, calcula:

b.1) [0,75 puntos] Probabilidad de que tres restaurantes no pasen la inspección.

b.2) [0,75 puntos] Probabilidad de que todos los restaurantes pasen la inspección.

b.3) [1 punto] Probabilidad de que al menos dos restaurantes pasen la inspección.

Resolución

Realizamos 8 veces el experimento aleatorio de elegir al azar un restaurante y ver si pasa o no la inspección y la probabilidad de que NO pase la inspección es $5\% = 0,05$, entonces la variable aleatoria $X = \text{"nº de restaurantes que NO pasan la inspección"} \rightarrow B(8 ; 0,05)$

La ley de probabilidad es $p_k = p(X = k) = \binom{8}{k} 0,05^k 0,95^{8-k}$, con $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 7, 8$.

b.1) Se pide $p(X = 3) = \binom{8}{3} 0,05^3 0,95^5 = 56 \cdot 0,05^3 0,95^5 \cong 0,00542 = 0,542\%$

b.2) Todos los restaurantes pasan la inspección sólo cuando $X = 0$

Se pide $p(X = 0) = \binom{8}{0} 0,05^0 0,95^8 = 1 \cdot 1 \cdot 0,95^8 \cong 0,6634 = 66,34\%$

b.3) Al menos dos restaurantes pasan la inspección sólo cuando $X < 2$

Piden

$p(X = 0) + p(X = 1) = \binom{8}{0} 0,05^0 0,95^8 + \binom{8}{1} 0,05^1 0,95^7 = 1 \cdot 1 \cdot 0,95^8 + 8 \cdot 0,05 \cdot 0,95^7 \cong 94,28\%$