تمرين 1 :

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1 - \frac{1}{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - u_n}$$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.
2. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1 - u_n + \sqrt{1 - u_n}}$$

, ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3. أثبت أنّ (u_n) متقاربة .
4. لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \ln(1 - u_n)$

- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .
- أحسب الجداء π_n حيث: $\pi_n = (1 - u_0) \times (1 - u_1) \times \cdots \times (1 - u_n)$.

تمرين2:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2};\ u_1 = 1 \\ \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}\right) : n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

تمرين 3 :

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$
2. لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$

- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .
- أحسب المجموع S حيث: $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
- أحسب الجداء π_n حيث: $\pi_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$.

تمرين 4:

نعتبر f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بالعبارة : $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1. أثبت أن: $f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^+$.
2. أثبت أن : f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^+$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \le \sqrt{3}$ فإن $f(x) \le \sqrt{3}$.
3. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = -1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n , $u_n \ge 0$.
- برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$.
- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) , ثم استنتج أنها متقاربة .

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=\frac{2u_n}{-1+4u_n}$$

2. نعتبر (v_n) متتالية معرفة بـ $v_n=\frac{1}{u_n}-\frac{4}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n . ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين 5:

I - (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{5}{6}u_n-\frac{2}{6}$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n>-2$

2. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج تقارب المتتالية (u_n) .

II - نعتبر (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n=\frac{3}{u_n+2}$

1. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3. أوجد نهاية المتتالية (u_n) .

4. نعتبر (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ

$$v_n=\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}$$

- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

تمرين 7 :

(U_n) متتالية عددية معرفة على ¥ كمايلي :

$U_0=4$ و $U_{n+1}=\frac{9U_n-49}{U_n-5}$

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n\neq 7$

2) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على ¥ كمايلي :

$$V_n=\frac{1}{U_n-7}$$

3) برهن أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

4) عبر عن V_n و U_n بدلالة n

5) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=V_0+V_1+....+V_n$

ثم استنتج بدلالة n المجموع :

$H_n=V_0U_0+V_1U_1+....+V_nU_n$.

تمرين 8 : $BAC2009$ (3 ع ت) (5 نقاط)

4. أحسب بدلالة n المجموع :

$S_n = v_0u_0 + v_1u_1 + \cdots v_nu_n$.

تمرين 6 :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$

I . أرسم في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ المنحني (c_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ حيث:

$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

II . باستعمال الرسم السابق و دون حساب الحدود مثل على محور الفواصل الحدود $u_0 ; u_1 ; u_2$.

1. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $1 \le u_n < 4$

جـ. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

III . نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة :

$v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم .

1. عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول v_0 .
2. نضع $\alpha = -4$

أ . اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ب . أحسب بدلالة n المجموع :

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

(U_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول U_1 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases} U_1 + 2U_2 + U_3 = 32 \\ U_1 \times U_2 \times U_3 = 216 \end{cases}$$

1) أ- أحسب U_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول U_1

ب- أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n

ج- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$

ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$

2) (V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي: $V_1 = 2$ و $V_{n+1} = \frac{3}{2}V_n + U_n$

أ) أحسب V_2 و V_3

ب) نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$W_n = \frac{V_n}{U_n} - \frac{2}{3}$

بين أن (W_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

1) أ- أكتب W_n بدلالة بدلالة n ثم إستنتج V_n بدلالة n

ب- أحسب المجموع $S_n = w_1 + \cdots + w_n$ بدلالة n .

تمرين 11 :

I) f دالة معرفة على المجال $[2,+\infty[$ كمايلي:

$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$

تمرين 9:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

1. أحسب الحدود $u_1 ; u_2 ; u_3$.
2. باستعمال البرهان بالتراجع بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
3. هل المتتالية (u_n) ؟ علل .
4.) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على ¥ كمايلي :

$$V_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_1 + \cdots + v_n$.
- عين أصغر عدد طبيعي n بحيث : $S_n < -3$
- أحسب نهاية S_n عند $+\infty$.

تمرين 10:

نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0 = 1$ و $3u_{n+1} = 2u_n + n + 3$.

1. أحسب الحدود $u_1 ; u_2 ; u_3$.
2. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على ¥ كمايلي :

$$V_n = u_n - n$$

1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) عبر عن v_n و u_n بدلالة n .

جـ) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ما هي نهايتها ؟

1) احسب $f'(x)$ ثم ادرس اشارتها على المجال $[2,+\infty[$

2) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[2,+\infty[$

II) (U_n) متتالية معرفة على ¥ كمايلي: $\begin{cases} U_0 = \dfrac{5}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1- برهن بالتراجع انه من اجل كل n من ¥ فإن:

$2 \text{ p } U_n \text{ p } 3$

2- استنتج انه من اجل $n \in$ ¥ : $U_n{}^2 \text{ p } \dfrac{9}{10}\left(U_n{}^2 + 1\right)$

3- أثبت ان المتتالية (U_n) متناقصة تماما

4- تحقق انه من اجل $n \in$ ¥ :

$$U_{n+1} - 2 = \frac{U_n{}^2}{U_n{}^2 + 1}(U_n - 2)$$

5- اثبت انه من اجل $n \in$ ¥ : $0 \text{ p } U_n - 2 \le \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$

6- هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟ ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

تمرين 12 : BAC 2011 (3 تق ر) (5 نقاط)

(U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$U_1 = 1$ و $U_n = \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

1) اثبت انه من اجل كل عدد عدد طبيعي غير معدوم n :

$U_n = 1 + \dfrac{1}{n(n+2)}$ ثم استنتج ان : $U_n \text{ f } 1$

2) أدرس إتجاه تغير (U_n) ،ثم بين انها متقاربة،احسب نهاية (U_n)

3) ليكن الجداء P_n المعرف كمايلي :

$$\mathrm{P}_n = u_0 \times u_1 \ldots\ldots \times u_n$$

- اثبت بالتراجع انه من اجل $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \dfrac{2n+2}{n+2}$

4) (V_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي :

$$V_n = \ln U_n$$

حيث ln الدالة اللوغارتم النيبيري

3. أحسب المجموعين : $S = 1 + 2 + \cdots + 99$.

$$S' = 1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{99}$$

4. استنتج المجموع : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{99}$.

عبر بدلالة P_n عن S_n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

ثم احسب نهاية S_n لما ينتهي n الى $+\infty$