

Лекція №9

Лінія, навантажена на комплексний опір

Раніше доведено, що Z_{ex} при $l \neq n \frac{\lambda}{4}$ ($n=1, 2, 3$), навантаженій на активний опір лінії, має комплексний характер:

$$\dot{Z}_{\text{ex}} = r_{\text{ex}} + jx_{\text{ex}}$$

Якщо відсікти праворуч ділянку лінії у довільній точці $\xi \neq n \frac{\lambda}{4}$ і замість неї включити новий опір навантаження, що дорівнює вхідному опору цієї ділянки, то розподіл U та I в частині лінії, що залишилася, збережеться незмінним.

У лінії встановиться режим змішаних хвиль! Але на відміну від випадку активного навантаження на кінці ДЛ не буде max та min U чи I .

Знайдемо P_u - коефіцієнт відбиття за напругою.

$$\begin{aligned} P_u &= \frac{\dot{Z}_2 - Z_0}{\dot{Z}_2 + Z_0} = \left[Z_2 = r_2 + jx_2 \right] = \frac{r_2 + jx_2 - Z_0}{r_2 + jx_2 + Z_0} = \frac{(r_2 - Z_0) + jx_2}{(r_2 + Z_0) + jx_2} = \left| \begin{array}{l} \text{множимо на} \\ \text{комплексно-спряжений} \\ \text{знаменник} \end{array} \right| = \\ &= \frac{(r_2 - Z_0 + jx_2)(r_2 + Z_0 - jx_2)}{(r_2 + Z_0)^2 + x_2^2} = \left| \text{м.я.} (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2 \right| = \\ &= \frac{r_2^2 + r_2 Z_0 - jx_2 r_2 - r_2 Z_0 - Z_0^2 + jx_2 Z_0 + jx_2 r_2 + jx_2 Z_0 + x_2^2}{(r_2 + Z_0)^2 + x_2^2} = \frac{Z_2^2 - Z_0^2 + 2jx_2 Z_0}{(r_2 + Z_0)^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

Або в показовій формі

$$\begin{aligned} \dot{P}_u &= |P_u| \cdot e^{j\psi_u}, \\ \psi_u &= \arctg \frac{2x_2 Z_0}{Z_2^2 - Z_0^2}. \end{aligned}$$

Тобто в точці відбиття напруга відбитої хвилі зсунута за фазою відносно напруги падаючої хвилі на кут ψ_u .

Запишемо струм та напругу в довільній точці лінії

$$(5) \begin{cases} \dot{U} = \frac{\dot{U}_2 + I_2 Z_0}{2} e^{-\gamma(x-l)} + \frac{\dot{U}_2 - I_2 Z_0}{2} e^{\gamma(x-l)} \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_2 + I_2 Z_0}{2Z_0} e^{-\gamma(x-l)} - \frac{\dot{U}_2 - I_2 Z_0}{2Z_0} e^{\gamma(x-l)}. \end{cases}$$

з урахуванням вищенаведеного, отримаємо для лінії без втрат

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_2 + I_2 Z_0}{2} e^{j\beta\xi} \left[1 + P_u e^{j(\psi_u - 2\beta\xi)} \right]$$

Тут враховане наступне: стала розповсюдження та коефіцієнт фази пов'язані між собою $\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$.

Таким чином амплітуда буде максимальною, якщо $(\psi_u - 2\beta\xi) = 2\pi n, n = 0, 1, 2, \dots$. Перший максимум напруги знаходиться в точці

$$\xi_0 = \frac{\psi_u}{2\beta} = \frac{\lambda}{4\pi} \operatorname{arctg} \frac{2x_2 Z_0}{Z_2^2 - Z_0^2}$$

Знайдемо коефіцієнт біжучої хвилі

$$k_\sigma = \frac{1 - |p_u|}{1 + |p_u|} = \frac{\sqrt{(r_2 + Z_0)^2 + x_2^2} - \sqrt{(r_2 - Z_0)^2 + x_2^2}}{\sqrt{(r_2 + Z_0)^2 + x_2^2} + \sqrt{(r_2 - Z_0)^2 + x_2^2}}$$

Ці вирази дають можливість обчислити активну та реактивну складові опору навантаження Z_2 , якщо відомі k_σ , Z_0 в лінії та відстань від її кінця до точки першого максимуму (або мінімуму) напруги ξ_0 . Практично величини k_σ та ξ_0 знаходять експериментально шляхом зняття кривих розподілу амплітуд напруги вздовж лінії із заданим хвильовим опором – так званої вимірювальної лінії. На цьому принципі засновано один з методів вимірювання комплексних опорів в УКХ діапазоні.

Залежність вхідного опору лінії з комплексним навантаженням від частоти має такий же характер, як і для лінії, навантаженої на активний опір $r_2 \neq Z_0$. Тільки в нашому випадку нулі реактивної складової і відповідно екстремальні значення активної складової Z_{ex} будуть зміщені з точок $\xi = 0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \dots$ Тобто $x_{\text{ex}} = 0$ в точках, де $\psi_u - 2\beta l = n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

Приклад. Розрахуємо вхідний опір ДЛ, довжина якої $n \frac{\lambda}{4}$. Якщо $n = 2m$, де $m = 1, 2, \dots$, то $\beta l = \left| \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \right| = \frac{2\pi}{\lambda} l = \left| l = n \frac{\lambda}{4} \right| = \frac{2\pi}{\lambda} n \frac{\lambda}{4} = |n = 2m| = \frac{2\pi}{\lambda} 2m \frac{\lambda}{4} = m\pi$, тобто $Z_{\text{ex}} = Z_0 \frac{Z_2 \cos \beta l + jZ_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + jZ_2 \sin \beta l} = Z_0 \frac{Z_2 \cos m\pi + jZ_0 \sin m\pi}{Z_0 \cos m\pi + jZ_2 \sin m\pi} = \left| \begin{array}{l} \cos m\pi = 1 \\ \sin m\pi = 0 \end{array} \right| = Z_0 \frac{Z_2}{Z_0} = Z_2$.

Значить, вхідний опір лінії, довжина якої дорівнює цілій кількості напівхвиль ($n \frac{\lambda}{4}$, $n = 2m$, $2m \frac{\lambda}{4} = m \frac{\lambda}{2}$, $m = 1, 2, \dots$), дорівнює опору навантаження.

При непарних $n = 2m - 1$ величина $\beta l = (2m - 1) \frac{\pi}{2}$ та $Z_{\text{ex}} = \frac{Z_0^2}{Z_2}$.

Тобто лінія, довжина якої дорівнює непарній кількості чвертей хвилі, виконує трансформацію опорів. Так, малі активні опори можуть бути трансформовані в опори більшої величини, індуктивні опори перетворюються в ємнісні і т.і. Подібні властивості чвертьхвильових відрізків лінії знаходять застосування на практиці.

Режим ХХ та КЗ в лінії із втратами

Комплексні амплітуди у загальному випадку мають вигляд (лінія із втратами)

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \frac{e^{\gamma\xi} + e^{-\gamma\xi}}{2} + I_2 Z_0 \frac{e^{\gamma\xi} + e^{-\gamma\xi}}{2} = \dot{U}_2 ch\gamma\xi + I_2 Z_0 sh\gamma\xi \\ \dot{I} = I_2 \frac{e^{\gamma\xi} + e^{-\gamma\xi}}{2} + \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \frac{e^{\gamma\xi} + e^{-\gamma\xi}}{2} = I_2 ch\gamma\xi + \frac{\dot{U}_2}{Z_0} sh\gamma\xi \end{cases} \quad (1)$$

В режимі ХХ амплітуда струму на кінці лінії $I_2 = 0 \Rightarrow$ система рівнянь набуде вигляду:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 ch\gamma\xi \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{Z_0} sh\gamma\xi \end{cases} \quad (2)$$

Врахуємо властивості гіперболічних функцій:

$$\begin{cases} ch\gamma\xi = ch(\alpha\xi + j\beta\xi) = ch\alpha\xi \cos \beta\xi + jsh\alpha\xi \sin \beta\xi \\ sh\gamma\xi = sh(\alpha\xi + j\beta\xi) = sh\alpha\xi \cos \beta\xi + jch\alpha\xi \sin \beta\xi \end{cases} \quad (3)$$

Підставивши (3) у (2) отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 ch\alpha\xi (\cos \beta\xi + jth\alpha\xi \sin \beta\xi) \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{Z_0} ch\alpha\xi (th\alpha\xi \cos \beta\xi + j \sin \beta\xi) \end{cases} \quad (4)$$

е $th\alpha\xi = \frac{sh\alpha\xi}{ch\alpha\xi}$ - тангенс гіперболічний.

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \dot{U}'_2(\xi) &= \dot{U}_2 ch\alpha\xi \\ m'(\xi) &= th\alpha\xi \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}'_2(\xi) (\cos \beta\xi + jm'(\xi) \sin \beta\xi) \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}'_2(\xi)}{Z_0} (m'(\xi) \cos \beta\xi + j \sin \beta\xi) \end{cases} \quad (5)$$

Вирази (5) аналогічні рівностям, отриманим для режиму змішаних хвиль:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 (\cos \beta\xi + jm \sin \beta\xi) \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{Z_0} (m \cos \beta\xi + j \sin \beta\xi) \end{cases} \quad (6)$$

Але! \dot{U}'_2 та m' залежать від ξ у лінії із втратами. Їх значення при збільшенні відстані від кінця лінії до точки спостереження у відповідності із зміною функцій $th(\alpha\xi)$ та $ch(\alpha\xi)$ збільшуються. В межі, при $\xi \rightarrow \infty$, величина m' звертається в одиницю, а \dot{U}'_2 прагне до нескінченості.

Криві розподілення амплітуд напруги та струму вздовж лінії показані на рисунку нижче. Тут показані також величини амплітуд напруги падаючої та відбитої хвиль (рисунок 2). При віддаленні від кінця лінії різниці між максимальним та мінімальним

значеннями струму поступово зменшуються, тобто криві згладжуються, а середні значення зростають.

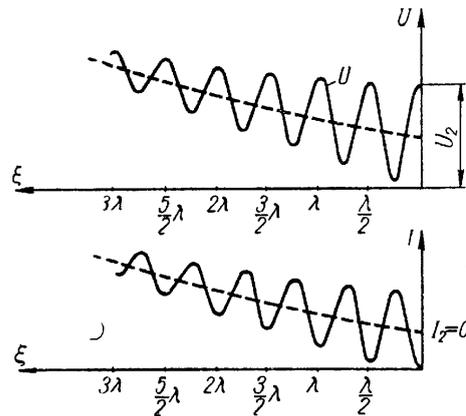


Рисунок 1 Розподіл амплітуд напруги та струму вздовж лінії з втратами при $Z_2 \rightarrow \infty$

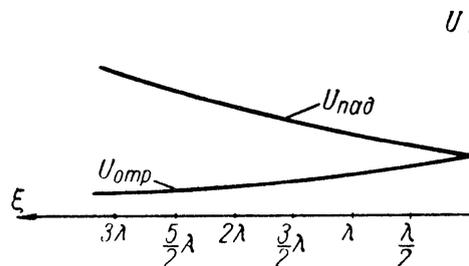


Рисунок 2 Амплітуди напруги падаючої та відбитої хвиль вздовж лінії з втратами при $Z_2 \rightarrow \infty$

Тобто в лінії із втратами амплітуди падаючої та відбитої хвиль внаслідок згасання безперервно змінюються за довжиною. На великих відстанях від кінця лінії відбита хвиля стає значно слабкіше падаючої, тому розподіл струму та напруги при $\alpha \xi \ll 1$ наближається до розподілу як при режимі біжучих хвиль. Навколо точки відбиття падаюча та відбита хвиля мають майже рівні амплітуди, тобто режим в цій частині лінії близький до режиму стоячих хвиль.

Аналогічно розмірковуючи, отримаємо, що **лінія в КЗ** ($Z_2 \rightarrow 0$) веде себе аналогічно випадку з $Z_2 \rightarrow \infty$, але наприкінці ДЛ $U = 0$, $I = I_{\max}$.

Таким чином наявність втрат призводить до того, що в режимі ХХ та КЗ встановлюються змішані хвилі. При цьому $k_0(\xi)$ тобто змінюється за довжиною.

На кінці лінії ($\xi = 0$) $k_0(\xi) \approx 0$ (мале), а на початку ДЛ ($\xi \uparrow \uparrow$) $k_0(\xi) \approx 1$.

Вхідний опір лінії з втратами отримаємо із загального виразу для лінії з втратами:

$$Z_{\text{вх}} = Z_0 \frac{Z_2 \text{ch} \gamma l + Z_0 \text{sh} \gamma l}{Z_0 \text{ch} \gamma l + Z_2 \text{sh} \gamma l} = |Z_2 \rightarrow \infty| = Z_0 \text{cth}(\gamma l) \quad (7)$$

де $\text{cth}(\gamma l) = \frac{\text{ch}(\gamma l)}{\text{sh}(\gamma l)}$ – котангенс гіперболічний аргументу (γl).

Для ДЛ з малими втратами хвильовий опір дорівнює:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = \sqrt{\frac{r_1 + j\omega L_1}{g_1 + j\omega C_1}} = \left| \frac{\omega L_1 \parallel r_1}{\omega C_1 \parallel g_1} \right| = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

Підставимо (3) до (7) і врахуємо співвідношення $ch^2\alpha l - sh^2\alpha l = 1$, отримаємо:

$$\begin{cases} ch\gamma\xi = ch(\alpha\xi + j\beta\xi) = ch\alpha\xi \cos \beta\xi + jsh\alpha\xi \sin \beta\xi \\ sh\gamma\xi = sh(\alpha\xi + j\beta\xi) = sh\alpha\xi \cos \beta\xi + jch\alpha\xi \sin \beta\xi \end{cases} \quad (3)$$

$$Z_{ex} = Z_0 cth(\gamma l) = r_{ex} + jx_{ex}, \quad (8)$$