



EQUATIONS

I. Equations du premier degré

Une **équation** est une égalité où au moins un des nombres est désigné par une lettre. Ces nombres écrits en lettres sont les **inconnues** de cette équation. **Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs** des inconnues pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

Une **équation du premier degré à une inconnue** est une équation qui **peut** se mettre sous la forme $ax + b = 0$ où a et b sont des **constantes** et x est une **inconnue**.

Pour résoudre une telle équation, on isole les termes contenant l'**inconnue** d'un côté et les **constantes** de l'autre en utilisant la règle suivante :

Règle

Soit a , b et c des nombres réels, on peut affirmer :

- $a = b$ si et seulement si $a + c = b + c$
- $a = b$ si et seulement si $a - c = b - c$
- $a = b$ si et seulement si $a \times c = b \times c$ ($c \neq 0$)
- $a = b$ si et seulement si $a : c = b : c$ ($c \neq 0$)

Exemple

On veut résoudre l'équation suivante :

$$5x + 2 = 3x - 8 \quad 5x + 2 - 3x = 3x - 8 - 3x \quad 2x + 2 = -8 \quad 2x + 2 - 2 = -8 - 2 \quad 2x = -10 \quad \frac{2x}{2} = \frac{-10}{2} \quad x = -5$$

Vérification

$$5x + 2 = 5 \times (-5) + 2 = -25 + 2 = -23$$

$$3x - 8 = 3 \times (-5) - 8 = -15 - 8 = -23$$

L'équation admet une solution $x = -5$.

$$S = \{-5\}$$

Remarque

Le point de coordonnées $(-5 ; -23)$ est le point d'intersection des droites d'équation $y = 5x + 2$ et $y = 3x - 8$

II. Inéquations

Une **inéquation** est une **inégalité** où certains nombres sont désignés par des lettres nommées **inconnues**.

Résoudre une telle inéquation, c'est trouver **tous les nombres** vérifiant l'inégalité.

On distingue deux types d'inégalités :

- Les inégalités strictes ($<$ ou $>$) ;
- Les inégalités larges ($\leq$ ou $\geq$).

« $x < 2$ » désigne un nombre x **strictement inférieur** à 2.

« $x \geq 2$ » se lit « x est **supérieur ou égal** à 2 ».

Pour résoudre une inéquation, on utilise le même procédé qu'une équation. Dans le cas d'une inéquation du 1^{er} degré à une inconnue, on isole les termes en x d'un côté en utilisant la règle suivante :

Règle

Soit a , b et c des nombres réels.

- Si $a < b$ alors $a + c < b + c$.
- Si $a < b$ alors $a - c < b - c$.
- Si $a < b$ et si $c > 0$, alors $a \times c < b \times c$.
- Si $a < b$ et si $c > 0$, alors $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Si $a < b$ et si $c < 0$, alors $a \times c > b \times c$.
- Si $a < b$ et si $c < 0$, alors $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Remarque

$2 < 3$ mais $2 \times (-3) > 3 \times (-3)$.

Exemple 1

On veut résoudre l'inéquation $3x + 7 \leq x - 3$.

Solution

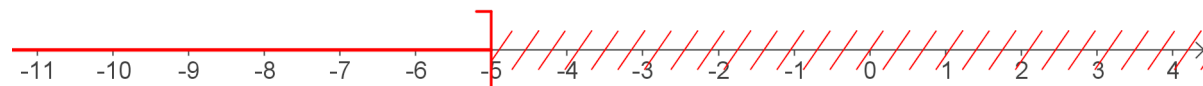
$$3x + 7 - x \leq x - 3 - x$$

$$2x + 7 - 7 \leq -3 - 7 \quad \frac{2x}{2} \leq \frac{-10}{2} \quad x \leq -5$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à -5 .

$$S =] - \infty; -5]$$

Représentation graphique



Remarque

-5 est solution de l'inéquation : le crochet est donc **tourné vers l'ensemble des solutions** (ici, vers la gauche).

Exemple 2

On veut résoudre l'inéquation :

$$-4x + 3 > 5$$

Solution :

$$-4x + 3 - 3 > 5 - 3 \quad -4x > 2 \quad \frac{-4x}{-4} < \frac{2}{-4} \quad x < -0,5$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à $-0,5$.

$$S =] - \infty; -0,5[$$

Représentation graphique



Remarque

– 0,5 n'est pas solution de l'inéquation donc le crochet est tourné vers l'**extérieur** par rapport aux solutions (ici vers la droite).

III. Systèmes à 2 inconnues

Résoudre un système du type $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ revient à chercher l'intersection $(x_0; y_0)$ des deux droites d_1 et d_2 du plan d'équations $ax + by = c$ et $dx + ey = f$. Si les droites sont **sécantes**, le système admet **une solution**. Si les droites sont **parallèles**, le système n'admet **aucune solution**. Si les droites sont **confondues**, les solutions sont **tous les points de la droite**. Les droites sont parallèles si les coefficients du membre de gauche sont liés et confondues si tous les coefficients sont liés.

Autrement dit, les droites sont **parallèles** si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ c'est-à-dire **si** $ae - bd = 0$ **et** $bf - ec \neq 0$.

Les droites sont **confondues** si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ c'est-à-dire **si** $ae - bd = 0$ **et** $bf - ec = 0$.

La deuxième condition est plus générale car elle n'impose aucune condition de non nullité.

Les droites sont donc **sécantes** si $ae - bd \neq 0$.

On distingue deux méthodes de résolution d'un système : par **substitution** et par **combinaisons linéaires**.

Méthode par substitution

On isole x ou y dans une des équations et on substitue le résultat dans l'autre équation.

PS : cette méthode n'est pratique que si l'un des coefficients est 1 ou -1 . Dans le cas contraire, des calculs fractionnaires font vite leur apparition.

Exemple

$$(S_1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 3(5 - y) - 2y = 5 \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 15 - 5y = 5 \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Donc } S_1 = \{(3; 2)\}$$

Méthode par combinaisons linéaires

Pour chaque équation, on multiplie les deux membres par un même nombre afin qu'en sommant les équations membre à membre, les termes en x ou en y s'annulent.

Exemples

$$(S_2) \begin{cases} 2x + 3y = -11 & (L_1) \\ 3x - 5y = 12 & (L_2) \end{cases}$$

$$10x + 15y = -55 \quad 5(L_1) \quad \frac{9x - 15y = 36}{19x = -19} \quad 3(L_2) \quad \frac{-6x + 10y = -24}{19y = -57}$$

Donc

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 19x = -19 \\ 19y = -57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{Donc } S_2 = \{(-1; -3)\}$$

