

I. Equations du premier degré

Une **équation** est une égalité où au moins un des nombres est désigné par une lettre. Ces nombres écrits en lettres sont les **inconnues** de cette équation. **Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs** des inconnues pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

Une **équation du premier degré à une inconnue** est une équation qui **peut** se mettre sous la forme ax + b = 0 où a et b sont des **constantes** et x est une **inconnue**.

Pour résoudre une telle équation, on isole les termes contenant l'**inconnue** d'un côté et les **constantes** de l'autre en utilisant la règle suivante :

Règle

Soit a, b et c des nombres réels, on peut affirmer :

- a = b si et seulement si a + c = b + c
- a = b si et seulement si a c = b c
- a = b si et seulement si $a \times c = b \times c$ $(c \neq 0)$
- a = b si et seulement si a: c = b: c ($c \ne 0$)

Exemple

On veut résoudre l'équation suivante :

$$5x + 2 = 3x - 85x + 2 - 3x = 3x - 8 - 3x2x + 2 - 2 = -8 - 2\frac{2x}{2} = \frac{-10}{2}x = -5$$

Vérification

$$5x + 2 = 5 \times (-5) + 2 = -25 + 2 = -23$$

$$3x - 8 = 3 \times (-5) - 8 = -15 - 8 = -23$$

L'équation admet une solution x = -5.

$$S = \{-5\}$$

Remarque

Le point de coordonnées (-5; -23) est le point d'intersection des droites d'équation y = 5x + 2 et y = 3x - 8

II. Inéquations

Une **inéquation** est une inégalité où certains nombres sont désignés par des lettres nommées **inconnues**.

Résoudre une telle inéquation, c'est trouver tous les nombres vérifiant l'inégalité.

On distingue deux types d'inégalités :

- Les inégalités strictes (< ou >);
- Les inégalités larges (\leq ou \geq).

« x < 2 » désigne un nombre x strictement inférieur à 2.

« x≥2 » se lit « x est **supérieur ou égal** à 2 ».

Pour résoudre une inéquation, on utilise le même procédé qu'une équation. Dans le cas d'une inéquation du 1^{er} degré à une inconnue, on isole les termes en x d'un côté en utilisant la règle suivante :

Règle

Soit a, b et c des nombres réels.

- Si a < b alors a + c < b + c.
- Si a < b alors a c < b c.
- Si a < b et si c > 0, alors $a \times c < b \times c$.
- Si a < b et si c > 0, alors $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Si a < b et si c < 0, alors $a \times c > b \times c$.
- Si a < b et si c < 0, alors $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Remarque

$$2 < 3 \text{ mais } 2 \times (-3) > 3 \times (-3).$$

Exemple 1

On veut résoudre l'inéquation $3x + 7 \le x - 3$.

Solution

$$3x + 7 - x \le x - 3 - x$$

$$2x + 7 - 7 \le -3 - 7 \frac{2x}{2} \le \frac{-10}{2} x \le -5$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à -5.

$$S =]-\infty;-5]$$

Représentation graphique



Remarque

− 5 est solution de l'inéquation : le crochet est donc tourné vers l'ensemble des solutions (ici, vers la gauche).

Exemple 2

On veut résoudre l'inéquation :

$$-4x + 3 > 5$$

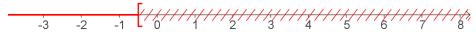
Solution:

$$-4x + 3 - 3 > 5 - 3 - 4x > 2\frac{-4x}{-4} < \frac{2}{-4}x < -0,5$$

Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à -0,5.

$$S =]-\infty;-0,5[$$

Représentation graphique



Remarque

− 0, 5 n'est pas solution de l'inéquation donc le crochet est tourné vers l'extérieur par rapport aux solutions (ici vers la droite).

III. Systèmes à 2 inconnues

Résoudre un système du type $\{ax + by = c dx + ey = f \text{ revient à chercher l'intersection } (x_0; y_0) \text{ des deux droites } d_1 \text{ et } d_2 \text{ du plan d'équations } ax + by = c \text{ et } dx + ey = f. \text{ Si les droites sont } \mathbf{sécantes}, \text{ le système admet } \mathbf{une solution}. \text{ Si les droites sont } \mathbf{parallèles}, \text{ le système n'admet } \mathbf{aucune solution}. \text{ Si les droites sont } \mathbf{confondues}, \text{ les solutions sont } \mathbf{tous les points de la droite}. \text{ Les droites sont parallèles si les coefficients du membre de gauche sont liés et confondues si tous les coefficients sont liés.}$

Autrement dit, les droites sont **parallèles** si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ c'est-à-dire **si** ae - bd = 0 **et** $bf - ec \neq 0$.

Les droites sont **confondues** si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ c'est-à-dire **si** ae - bd = 0 **et** bf - ec = 0.

La deuxième condition est plus générale car elle n'impose aucune condition de non nullité.

Les droites sont donc **sécantes** si $ae - bd \neq 0$.

On distingue deux méthodes de résolution d'un système : par **substitution** et par **combinaisons linéaires**.

Méthode par substitution

On isole *x* ou *y* dans une des équations et on substitue le résultat dans l'autre équation.

PS: cette méthode n'est pratique que si l'un des coefficients est 1 ou -1. Dans le cas contraire, des calculs fractionnaires font vite leur apparition.

Exemple

$$(S_1)\{x + y = 5 \, 3x - 2y = 5$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \{x = 5 - y \ 3(5 - y) - 2y = 5\}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \{x = 5 - y \ 15 - 5y = 5\}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \{x = 3 \ y = 2$$

Donc
$$S_1 = \{(3; 2)\}$$

Méthode par combinaisons linéaires

Pour chaque équation, on multiplie les deux membres par un même nombre afin qu'en sommant les équations membre à membre, les termes en *x* ou en *y* s'annulent.

Exemples

$$(S_2){2x + 3y = -11 (L_1) 3x - 5y = 12 (L_2)}$$

$$10x + 15y = -555(L_1) \frac{9x - 15y = 363(L_2)}{19x = -19} \qquad 6x + 9y = -333(L_1) \frac{-6x + 10y = -24 - 2(L_2)}{19y = -57}$$

Donc

$$(S_2) \Leftrightarrow \{19x = -195(L_1) + 3(L_2)19y = -573(L_1) - 2(L_2)\}$$

Donc
$$S_2 = \{(-1; -3)\}$$