

ÉTUDE D'UNE ONDE DE ZENNECK ORDRES DE GRANDEUR EN THERMODYNAMIQUE

CEN P' 1995
--

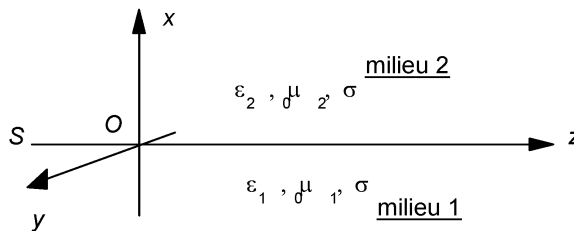
ÉNONCÉ

PREMIER PROBLÈME

ÉTUDE D'UNE ONDE DE ZENNECK À L'INTERFACE ENTRE DEUX MILIEUX

Les candidats devront impérativement exprimer les grandeurs demandées en fonction des paramètres indiqués.

On considère deux milieux homogènes, isotropes et linéaires différents séparés par l'interface S . Le trièdre de référence est le trièdre orthonormé $Oxyz$. Le plan yOz est l'interface S .



Dans le cas général, les milieux 1 et 2 sont des diélectriques à pertes par conduction. Chacun des milieux est caractérisé par sa permittivité ϵ_i , la perméabilité magnétique du vide μ_0 et une conductivité σ_i . Toutes ces grandeurs sont des réels positifs.

On se propose d'étudier la propagation d'une onde de surface qui se propage dans la direction des z positifs. Les champs de cette onde s'atténuent exponentiellement (selon Ox) dans les deux milieux. Enfin, l'onde qui dépend sinusoïdalement du temps (pulsation ω) ne présente dans les milieux que trois composantes E_x , E_z , B_y qui sont toutes indépendantes de la coordonnée y .

Les champs complexes sur cette structure peuvent s'écrire sous la forme:

$$E_{xi}(x, z) = e_{xi}(x) \exp(-hz) \quad i = 1, 2 \text{ indice du milieu} \quad E_{zi}(x, z) = e_{zi}(x) \exp(-hz) \quad B_{yi}(x, z) = b_{yi}(x) \exp(-hz) \quad h =$$

η est le même dans les deux milieux. On rappelle que les composantes des champs réels s'obtiennent par les transformations:

$$E_{xi} = \text{Re} \left[E_{xi} e^{j\omega t} \right] \quad E_{zi} = \text{Re} \left[E_{zi} e^{j\omega t} \right] \quad B_{yi} = \text{Re} \left[B_{yi} e^{j\omega t} \right]$$

I.A.

I.A.1. Écrire les deux équations de Maxwell qui permettent d'exprimer $\text{rot } \vec{E}$ et $\text{rot } \vec{B}$ en fonction des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et des grandeurs caractéristiques ϵ , μ , σ dans un milieu homogène, isotrope et linéaire.

I.A.2. Écrire alors ces équations dans les deux milieux. En déduire trois relations par milieu qui lient les composantes complexes des champs. On fera apparaître au passage la grandeur:

$$\underline{e}_i = e_i - j \frac{s_i}{\omega}$$

permittivité complexe apparente du milieu i .

I.A.3. Établir alors les deux équations différentielles vérifiées par b_{y1} et b_{y2} (équations d'onde).

I.A.4. Les solutions générales sont de la forme:

$$b_{y1} = C_1 \exp(k_1 x) + D_1 \exp(-k_1 x) \quad b_{y2} = C_2 \exp(k_2 x) + D_2 \exp(-k_2 x)$$

avec $k_1 = \alpha_1 + j \beta_1$ et $k_2 = \alpha_2 + j \beta_2$, $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$.

Exprimer k_1^2 en fonction de η , ϵ_1 , μ_0 et ω puis k_2^2 en fonction de η , ϵ_2 , μ_0 et ω .

En tenant compte des hypothèses de l'énoncé, préciser les solutions convenables. On pourra introduire dans les écritures des champs les constantes supposées réelles et positives B_1 et B_2 (en Tesla).

I.A.5. Exprimer alors les composantes réelles du champ magnétique dans chacun des deux milieux.

I.A.6. Établir les expressions des composantes complexes du champ électromagnétique dans les deux milieux.

I.A.7. On sait que les composantes E_z et B_y sont continues à la traversée de l'interface S . En déduire une relation simple entre B_1 et B_2 puis une autre entre k_1 et k_2 . Dans la suite on utilisera une seule constante notée B_0 .

I.B. On se propose maintenant d'étudier l'onde de Zenneck à l'interface air-eau de mer. Cette étude a des applications importantes: les communications avec les « engins immergés ». Le milieu 2 est donc de l'air:

$$e_2 = e_0 = \frac{1}{36 \cdot 10^9} F \cdot m^{-1}, m_0 = 4 \cdot 10^{-7} H \cdot m^{-1}, s_2 = 0$$

Le milieu 1 est l'eau de mer, $\epsilon_1 = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$, $\sigma_1 = \sigma$.

On donne les valeurs de ϵ_r et σ en basse fréquence, soit:

$$\epsilon_r = 80 \text{ et } \sigma = 4 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}, f = 36 \text{ Mhz.}$$

On va procéder maintenant aux calculs donnant les constantes qui caractérisent la propagation de l'onde de Zenneck. Les résultats sont relativement simples si on exprime ces constantes en fonction des grandeurs suivantes:

$$q = \frac{e_r e_0 w}{s}, e_r, \beta_0 = w \sqrt{e_0 m_0}, a = \sqrt{\frac{2}{s m_0 w}}$$

On fera des calculs approchés en remarquant que pour l'eau de mer à $f = 36 \text{ Mhz}$ on a $\theta \ll 1$ et $\varepsilon_r \gg 1$. Le calcul numérique donne $\theta = 4 \cdot 10^{-2}$.

I.B.1. Donner, compte tenu des indications précédentes, l'expression approchée de la permittivité complexe apparente de l'eau de mer $\underline{\varepsilon}_1$. Comment caractériser ce milieu à cette fréquence ? Quelle est l'approximation physique que l'on a réalisée ?

I.B.2. Compte tenu de l'approximation précédente, exprimer k_2 en fonction de a , puis k_2 en fonction de θ , a et ε_r . Exprimer alors k_2 puis η en fonction de β_0 et a .

I.B.3. Application numérique: Calculer les valeurs de α_1 , β_1 , α_2 , β_2 , α et β .

I.C. On se propose maintenant d'étudier de manière assez détaillée cette onde. On a établi à la question I.A.5. que la composante réelle du champ magnétique dans le milieu i a pour expression:

$$B_{yi} = B_i \exp(f_i(x, z)) \cos[wt + g_i(x, z)]$$

$f_i(x, z)$ et $g_i(x, z)$ étant des fonctions réelles de x et z .

On souhaite déterminer la nature des surfaces équi-phase (SEP) et des surfaces équi-amplitudes (SEA) du champ électromagnétique dans les deux milieux. Dans chaque milieu, on définit le vecteur d'onde $\vec{k}_i = -\text{grad} g_i$ et le vecteur affaiblissement $\vec{k}'_i = -\text{grad} f_i$.

I.C.1. Déterminer les composantes des vecteurs d'onde $\vec{k}_2$ dans l'air et $\vec{k}_1$ dans l'eau de mer. On exprimera les composantes de ces vecteurs sur Ox et Oz en fonction des grandeurs a et β_0 .

I.C.2. Exprimer de même les vecteurs affaiblissement $\vec{k}'_2$ et $\vec{k}'_1$ en fonction de a et β_0 . Interpréter le résultat obtenu pour la composante du vecteur $\vec{k}'_1$ sur l'axe Ox . Ce résultat était-il prévisible ?

On va maintenant procéder au tracé des SEA et des SEP dans les deux milieux.

I.C.3. Comment sont situés le vecteur d'onde et le vecteur d'affaiblissement par rapport aux SEP et aux SEA ? Former le produit scalaire $\vec{k}_2 \cdot \vec{k}'_2$. Interpréter ce résultat.

I.C.4. Préciser en quelques phrases et à l'aide d'une figure ce que sont pratiquement les SEA et les SEP du champ électromagnétique dans les deux milieux. On constate en effet des inéquations fortes entre les valeurs numériques

des composantes des vecteurs $\vec{k}_i$ et $\{\vec{k}_i\}$, ce qui permet de réaliser un tracé simplifié.

I.C.5. Dans l'air (milieu 2) un observateur se déplace dans la direction du vecteur d'onde. Quel affaiblissement constate-t-il ? Ce résultat mérite une explication physique que l'on donnera.

I.C.6. Calculer $|E_{x1}|/|E_{z1}|$ dans le milieu 1, et conclure sur le comportement de l'onde dans l'eau de mer.

La valeur moyenne du vecteur de Poynting réel est donnée à partir des composantes complexes du champ électromagnétique par:

$$\vec{P} > = \frac{1}{2} Re$$

I.C.7. Calculer $\vec{P}_1 >$ dans le milieu 1 (eau de mer) en fonction de B_0 , μ_0 , ϵ_0 , a , β_0 et de $\alpha_1 x$ et αz .

I.C.8. Calculer $\vec{P}_2 >$ dans le milieu 2 (air) en fonction de B_0 , μ_0 , ϵ_0 , a , β_0 et de $\alpha_2 x$ et αz .

I.C.9. Calculer la puissance moyenne $\overline{w_{z2}}(z)$ traversant en z l'aire définie par $0 < y < L$ et $0 < x < \infty$.

I.C.10. Calculer la puissance moyenne $\overline{w_{z1}}(z)$ traversant en z l'aire définie par $0 < y < L$ et $-\infty < x < 0$.

I.C.11. Montrer que le rapport:

$$R = \frac{\overline{w_{z2}}(z)}{\overline{w_{z1}}(z)}$$

peut se mettre sous la forme $R = \frac{N}{(\alpha^2 \beta_0^2)^3}$ où N est un entier.

I.C.12. Application numérique. Calculer . Commenter ces résultats.

SECOND PROBLÈME

Dans ce problème, l'objectif est d'atteindre l'ordre de grandeur de certains paramètres caractéristiques du système étudié. Par ordre de grandeur de x , on entend fréquemment une valeur numérique assez grossière $\ln|x| \in [\ln|x_0|-1, \ln|x_0|+1]$. Pour atteindre un ordre de grandeur, on s'appuiera sur des modèles simples, donnant des « grandes tendances », fournissant une expression le plus souvent approchée, du paramètre recherché dont on estimera ensuite la valeur

numérique. On pourra se servir de la liste des constantes physiques données en fin de problème, toutes les données n'étant pas forcément utiles.

II.A. Caractérisation d'un gaz parfait monoatomique.

On considère une mole d'un gaz parfait monoatomique, de masse molaire $M = 4\text{g.mol}^{-1}$, enfermée dans une enceinte de volume V_0 à la pression $P_0 = 10^5\text{Pa}$ et à la température $T_0 = 300\text{K}$.

II.A.1. Rappeler la définition d'un gaz parfait. Justifier pourquoi, en réalité, on obtient pour un gaz réel un comportement se rapprochant de celui des gaz parfaits à la limite des faibles densités.

II.A.2. Donner l'expression de la capacité calorifique molaire C_V à volume constant du gaz et en déduire le rapport

$$g = \frac{C_p}{C_V}$$

à cette température, C_p étant la capacité calorifique molaire à pression constante.

II.A.3. Dans le modèle des sphères dures (où les atomes sont assimilés à des sphères de diamètre D) estimer la section efficace σ de collision des atomes constituant le gaz. En déduire une expression du libre parcours moyen λ des atomes du gaz en fonction de σ et de la densité n (nombre d'atomes par unité de volume) dans l'enceinte. Donner son ordre de grandeur dans les conditions de température et de pression de cette partie II.A. Comment λ varie-t-il en fonction de la température T lors d'une transformation soit isobare, soit isochore, soit isentropique ?

II.A.4. Donner l'expression de la vitesse quadratique moyenne u des atomes du gaz. Comparer u à v^- , moyenne du module de la vitesse des atomes donnée par :

$$v^- = \sqrt{\frac{3RT}{pM}}$$

où M est la masse molaire du gaz. Conclure. En déduire l'ordre de grandeur du temps moyen séparant deux collisions successives, dans les conditions de température et de pression de cette partie.

II.A.5. Établir, à partir d'un modèle simple, le lien entre le coefficient d'autodiffusion D du gaz et le libre parcours moyen λ . On montrera qu'approximativement :

$$D = \frac{\lambda v^-}{3}$$

Préciser son ordre de grandeur dans les conditions de cette question.

II.B. Caractérisation d'un gaz parfait diatomique.

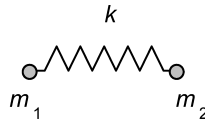
On considère maintenant une mole d'un gaz parfait diatomique, de masse molaire $M = 18\text{g.mol}^{-1}$, enfermée dans une enceinte de volume V_0 à la pression $P_0 = 10^5\text{Pa}$ et à la température $T_0 = 300\text{K}$.

II.B.1. On admet que les molécules de ce gaz sont indéformables à la température T_0 et dans son voisinage $[T_0 - \Delta T/2, T_0 + \Delta T/2]$.

Comment expliquez-vous que l'on ait $C_V = \frac{5}{2}R$ dans ce domaine de température ?

De même, interpréter le fait que, à très basse température (quelques Kelvins), C_V est proche de $\frac{5}{2}R$ et, au dessus de 2000°C , C_V prend une valeur de $\frac{7}{2}R$.

II.B.2. Pour quelle raison le mouvement interne d'une molécule diatomique est-il représenté par deux masses ponctuelles m_1 et m_2 attachées par un ressort ? Voyez-vous des limitations à une telle description ?



II.C. Caractérisation d'un gaz réel.

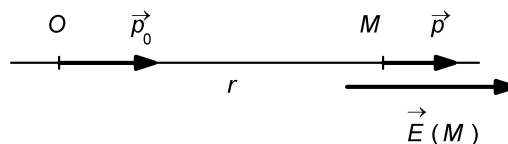
Dans cette partie, on considère une mole de gaz réel, suffisamment dense pour que la prise en compte de l'interaction intermoléculaire soit nécessaire. On admettra que ce système est homogène et existe, dans le domaine étudié de température et de pression, sous une seule phase et que son équation d'état est donnée par $(P + a/V^2)(V - b) = RT$ (pour une mole).

Notre objectif est d'obtenir des ordres de grandeur des constantes a et b figurant dans l'équation de Van der Waals précédente.

II.C.1. Estimer l'ordre de grandeur de b . Pour cela, on pourra remarquer que b est un volume limitant obtenu pour les hautes pressions et traiter les molécules en sphères dures de diamètre D .

Application numérique. Conclure si $T = T_0$ et $P = P_0$.

II.C.2. On cherche dans cette équation à établir l'ordre de grandeur des forces d'interaction de Van der Waals. On rappelle que ces forces d'interaction dipôle-dipôle sont attractives et de la forme $F = A/r^7$ où $OM = r$ est la distance séparant les deux dipôles. On va donner un ordre de grandeur de A dans le cas de l'interaction entre un dipôle permanent et le dipôle qu'il induit. Pour simplifier, on considère qu'un dipôle permanent $\vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_x$ est placé à l'origine O . Une molécule placée au point M acquiert sous l'influence du champ électrostatique créé par $\vec{p}_0$ un moment dipolaire induit $\vec{p} = e_0 \alpha \vec{E}(M)$ où α est la polarisabilité de la molécule.



a. Donner un ordre de grandeur de p_0 . Donner un exemple de molécule possédant un moment dipolaire permanent. Donner de même un ordre

de grandeur de α . On pourra par exemple s'appuyer sur le modèle de Thomson de l'atome d'Hydrogène. On rappelle que, dans ce modèle, l'électron, ponctuel et de charge $-e$, est plongé dans une sphère fixe de rayon assez grand, de charge $+e$ uniformément répartie en volume autour de la position centrale de l'atome.

b. En déduire, dans le cas d'interaction entre un dipôle permanent et un dipôle induit, une expression de A et son ordre de grandeur.

II.C.3. Pour une assemblée de molécules ayant un moment dipolaire permanent ou non, on admettra que l'interaction intermoléculaire se réduit encore à une force d'attraction $F = A/r^7$ où A a l'ordre de grandeur trouvé au II.C.2.b. Dans cette question, on souhaite évaluer l'énergie moyenne d'interaction d'une mole de molécules, enfermées dans une enceinte de volume V . Pour cela, on va supposer qu'une molécule donnée M_1 n'interagit qu'avec une seule molécule notée M_2 , dont la probabilité de présence à la distance $[r, r + dr]$ de M_1 vaut:

$$[dP(r) = 0 \text{ si } r < \frac{D}{2} \quad [dP(r) = \frac{4\pi r^2 dr}{V} \text{ si } \frac{D}{2} < r \leq r_0 [$$

où r_0 est tel que $\int dP(r) = 1$ ($r_0 \gg D$).

a. Commenter le modèle précédent.

b. En déduire que l'énergie moyenne d'interaction est pratiquement:

$$U_{int} = -\frac{8\pi}{9} \frac{N_A^2 A}{VD^3}$$

c. Montrer qu'on peut en tirer une expression du coefficient a et donner son ordre de grandeur (on supposera A constante et donnée par II.C.2.b.).

table des constantes physiques	
masse de l'électron	$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
masse du proton	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
masse du neutron	$m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
nombre d'Avogadro	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène	$a_0 = 53 \text{ pm}$
permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 @ \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ SI}$
perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$