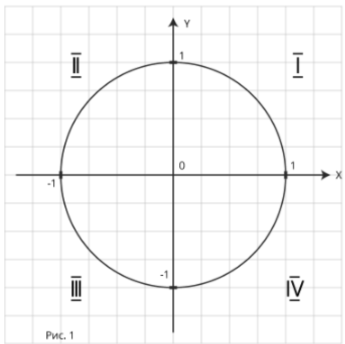
Дисциплина: ОД.07 Математика
Занятие № 59 **Группа ТТГ 1/1-9/25** **Дата: 13.01.2026**
Тип занятия: лекция 33 **Преподаватель:** Бережная В.А.
По теме: «*Основы тригонометрии*»

Цель занятия:
Деятельностная:
– создать условия для сознательного усвоения учащимися свойств и действий с тригонометрическими функциями произвольного угла.
Содержательная:
– актуализировать знания о тригонометрии: синус, косинус, тангенс, котангенс в прямоугольном треугольнике;
– расширить знания учеников за счет включения новых определений: тригонометрические функции (функция синуса, косинуса, тангенса, котангенса), периодичная функция, период, радианная мера угла;
– познакомиться с задачами на построение и анализ тригонометрических функций.
План занятия:
1. Радианная мера угла. Поворот точки вокруг начала координат.
2. Основные тригонометрические функции.

1. Поворот точки вокруг начала координат.

Радианная мера угла

В курсе планиметрии, как правило, за единицу измерения углов принимают градус. Один градус – это угол, равный $^1/_{180}$ части развернутого угла (обозначается 1°).



Окружность – это замкнутая линия, все точки которой равноудалены от центра.

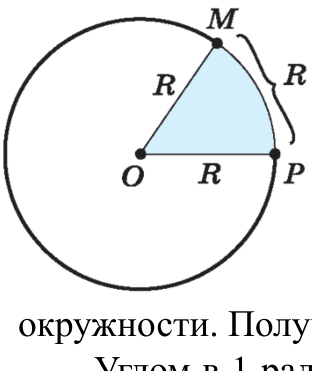
Радиус окружности – отрезок, соединяющий её центр с любой лежащей на окружности точкой.

Круг – часть плоскости, ограниченная окружностью.

Дуга окружности – кривая линия, лежащая на окружности и ограниченная двумя точками.

Круговой сектор – часть круга, ограниченная двумя радиусами.

Рассмотрим окружность радиуса, равному 1 единичному отрезку, в прямоугольной системе координат xOy с центром в начале координат. Такую ***окружность называют единичной или тригонометрической***.



Длина этой окружности, как мы помним из уроков геометрии, $L=2\pi R$. А учитывая, что $R=1$, $L=2\pi$, осями координат она поделена на четыре дуги, которые находятся соответственно в I, II, III и IV координатных четвертях. Вычислим длину каждой дуги: $2\pi/4 = \pi/2$. Длина полуокружности равна π. А так как образовался развернутый угол, то $\pi=180^\circ$.

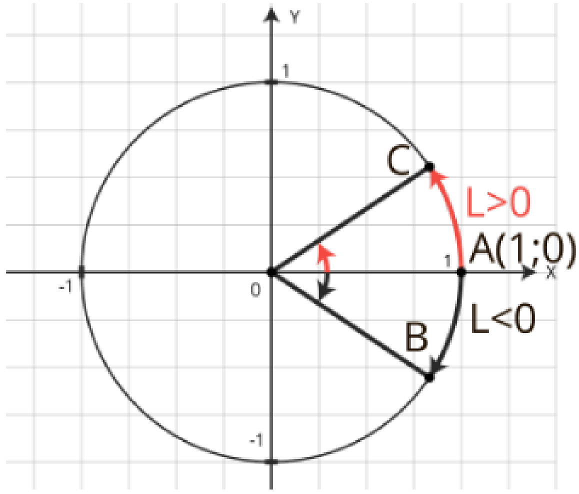
Рассмотрим дугу, равную по длине радиусу единичной окружности. Полученный центральный угол POM равен длине дуги MP=R.

Углом в 1 радиан называется центральный угол, опирающийся на дугу, равную по длине радиусу окружности.

Обозначается 1рад. $1\text{рад} = \frac{180^\circ}{\pi}$ (1 рад ≈ $57{,}3^\circ$)

Поворот точки вокруг начала координат

Вернёмся к единичной окружности в координатной плоскости.

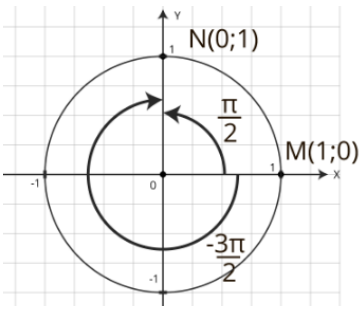


Каждая точка этой окружности будет иметь координаты x и y такие, что выполняются неравенства $-1 \leq x \leq 1$; $-1 \leq y \leq 1$.

Введём понятие поворота точки.

Пусть $\alpha > 0$. Тогда точка A(1;0) будет двигаться по единичной окружности против часовой стрелки. Она пройдёт путь α рад от точки A(1;0) до точки B. Говорят, точка B получена из точки A поворотом на угол α.

Пусть $\alpha > 0$. Тогда точка A(1;0) будет двигаться по единичной окружности по часовой стрелки . Она пройдёт путь α рад от точки A(1;0)до точки C. Говорят, точка C получена из точки A поворотом на угол - α.



При повороте на 0 рад точка остаётся на месте.

Давайте рассмотрим такой пример:

при повороте точки M(1;0) на угол $\pi/2$ получается точка N (0;1). В эту же точку можно попасть из точки M(1;0) при повороте на угол $-3\pi/2$.

Пример

Вычислите радианную меру угла:

а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°.

$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ рад.

а) $30^\circ = \dfrac{\pi}{180} \cdot 30 = \dfrac{\pi}{6}$;

б) $45^\circ = \dfrac{\pi}{180} \cdot 45 = \dfrac{\pi}{4}$;

в) $60^\circ = \dfrac{\pi}{180} \cdot 60 = \dfrac{\pi}{3}$;

г) $90^\circ = \dfrac{\pi}{180} \cdot 90 = \dfrac{\pi}{2}$;

д) $120^\circ = \dfrac{\pi}{180} \cdot 120 = \dfrac{2\pi}{3}$;

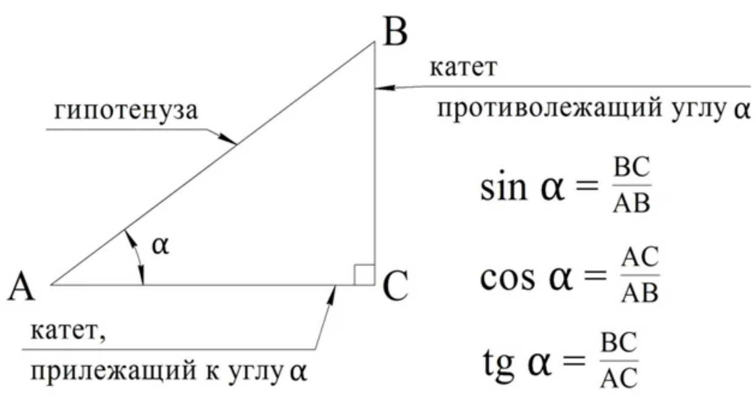
е) $135^\circ = \dfrac{\pi}{180} \cdot 135 = \dfrac{3\pi}{4}$;

ж) $150^\circ = \dfrac{\pi}{180} \cdot 150 = \dfrac{5\pi}{6}$.

2. Основные тригонометрические функции

Определение синуса и косинуса

Впервые мы познакомились с синусом, косинусом и другими тригонометрическими функциями ещё в 8 класс на уроках геометрии, при изучении прямоугольного треугольника. Пусть есть некоторый треугольник ABC, у которого $\angle C$ – прямой, а $\angle BAC$ принимается за α. Тогда $\sin\alpha$ – это отношение BC к AB, а $\cos\alpha$ – это отношение AC к AB. В свою очередь $\mathrm{tg}\alpha$ – это отношение BC к AC:



$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

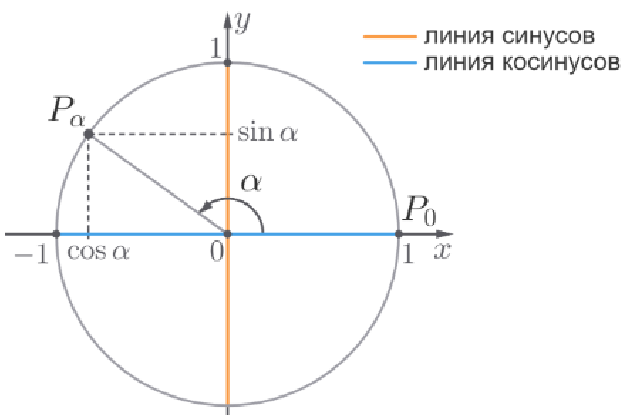
$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC}$$

Пусть точка $P_\alpha(x_\alpha ; y_\alpha)$ единичной окружности соответствует углу α. **Синусом** угла α называется ордината y_α точки P_α. $\sin\alpha = y_\alpha$.

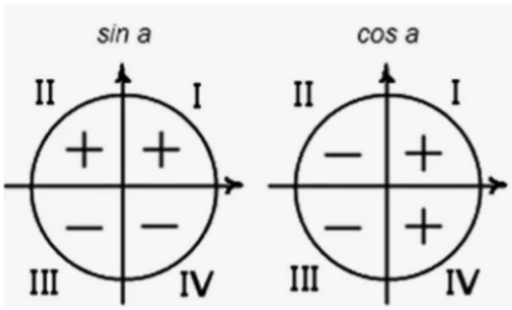
Пусть точка $P_\alpha(x_\alpha ; y_\alpha)$ единичной окружности соответствует углу α. **Косинусом** угла α называется абсцисса x_α точки P_α. $\cos\alpha = x_\alpha$.

Заметим, что в прямоугольном треугольнике углы, помимо самого прямого угла, могут быть только острыми. Поэтому предыдущее определение синуса и косинуса, данное в 8 классе в курсе геометрии, было пригодно лишь для углов из диапазона $0 < \alpha < 90°$. На единичной окружности можно отложить любой угол, то есть теперь мы можем вычислять тригонометрические ф-ции для произвольных значений α. При этом синус и косинус могут оказаться отрицательными величинами.



Знаки синуса и косинусов по четвертям

Указанное правило определения синуса и косинуса обобщается и на тупые углы, и на углы, лежащие в диапазоне от 180° до 360°. В таком случае синусы и косинусы могут принимать, как положительные, так и отрицательные значения. Различные знаки значений этих тригонометрических функций в зависимости от того, в какую четверть попадает рассматриваемый угол, принято изображать следующим образом:



Как видите, знаки тригонометрических функций определяются положительными и отрицательными направлениями соответствующих им осей.

Кроме того, стоит обратить внимание на то, что поскольку наибольшая координата точки на единичной окружности и по оси абсцисс и по оси ординат равна единице, а наименьшая минус единице, то и значения синуса и косинуса ограничены этими числами:

$$-1 \le \sin\alpha \le 1 \qquad\qquad -1 \le \cos\alpha \le 1$$

Эти записи еще принято записывать в таком виде:

$$|\sin\alpha| \le 1 \qquad\qquad |\cos\alpha| \le 1$$

Определение тангенса

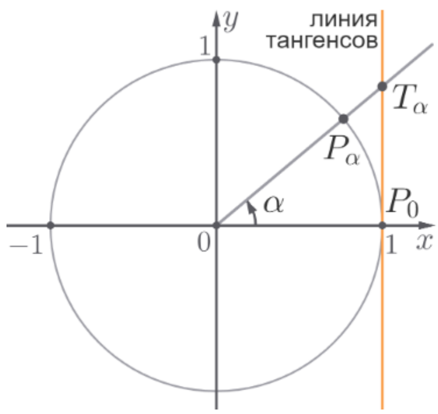
Линия тангенсов. Через точку $P_0(1;0)$ проведём к единичной окружности вертикальную касательную, уравнение которой $x = 1$. Эта прямая называется линией тангенсов.

Как по рисунку определить, чему равен tgα

tgα равен ординате точки пересечения прямой OP с линией тангенсов.

Пояснение. Пусть α – угол поворота такой, что $\cos\alpha \neq 0$. Точка P_α единичной окружности соответствует углу α, а прямая OP_α пересекает линию тангенсов в точке $T_\alpha(1;y_T)$.

Точка P_α имеет координаты $(\cos\alpha;\sin\alpha)$, а прямая OP_α задается уравнением $y=kx$, значит, $\sin\alpha = k\cdot \cos\alpha$. Отсюда



k= sinα/cosα=tgα. Итак, прямая $OP_α$ задается уравнением y=(tgα)x, точка $T_α$ принадлежит прямой $OP_α$, то есть y_T = (tgα)·1, откуда y_T = tgα.

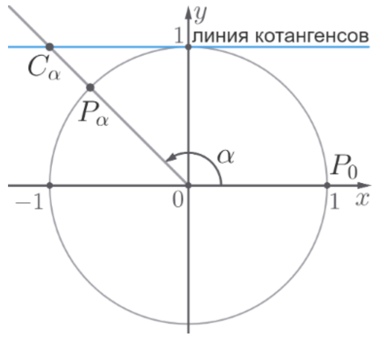
Получили, что tgα равен ординате соответствующей точки на линии тангенсов.

Определение котангенса

Линия котангенсов. Через точку $P_{π/2}$(0;1) проведем к единичной окружности горизонтальную касательную, уравнение которой y=1. Эта прямая называется линией котангенсов.

Как по рисунку определить, чему равен ctga

ctga равен абсциссе точки пересечения прямой OP с линией котангенсов.

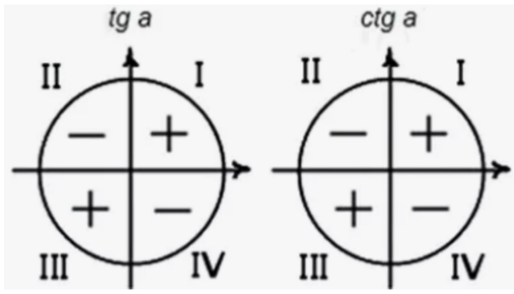


Пояснение. Пусть α — угол поворота такой, что sinα≠0. Точка единичной окружности соответствует углу α, а прямая $OP_α$ пересекает линию котангенсов в точке C(x_C; 1). Прямая $OP_α$ задается уравнением y=(tgα)x, точка C(x_C; 1) принадлежит прямой $OP_α$, следовательно, её координаты обращают уравнение прямой в верное числовое равенство 1=(tgα)· x_C, откуда x_C=1/ tgα, то есть x_C=ctgα. Значит, ctgα равен абсциссе соответствующей точки на линии котангенсов.

Их легко можно вычислить, зная значения синуса и косинуса данного угла, что мы уже умеем делать.

Знаки тангенса и котангенса по четвертям

Укажем изображение на окружности знаков тангенсов и котангенсов в зависимости от угла:



Отметим, что аналогично диапазонам значений синуса и косинуса можно указать диапазоны значений тангенса и котангенса. Исходя из их определения на тригонометрической окружности, значения этих функций не ограничены:

$-\infty < tg\alpha < +\infty$

$-\infty < ctg\alpha < +\infty$

Пример

Для вычисления тангенса проще всего использовать его определение. Мы знаем синусы и косинусы стандартных углов, а потому, деля их друг на друга, сможем найти и тангенсы стандартных углов:

$$\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 1} = \sqrt{3}$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 1}=\sqrt{3}\qquad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

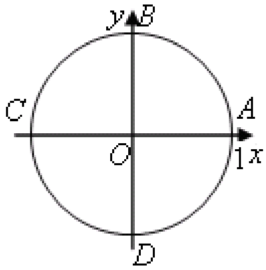
$$\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}=1\qquad \mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1}=0$$

Периодичность

1) Углы, которые больше 360°, откладываются против часовой стрелки с прохождением начала отсчета столько раз, сколько это нужно. Например, для построения угла 750° необходимо пройти два полных оборота и еще 30°. Для окончательного положения и вычисляются все тригонометрические функции. Несложно увидеть, что значение всех тригонометрических функций для 750° и для 30° будут одинаковыми.

2) Отрицательные углы откладываются точно по тому же принципу, что и положительные, только по часовой стрелке.

Уже по способу построения больших углов можно сделать вывод, что значения синусов и косинусов углов, которые отличаются на 360°, одинаковы. Если проанализировать значения тангенсов и котангенсов, то они будут одинаковы для углов, отличающихся на 180°.



Такие минимальные ненулевые числа, при добавлении которых к аргументу, не меняется значение функции, называют периодом этой функции.

Таким образом, период синуса и косинуса равен 2π, а тангенса и котангенса π.

Разобранные задания

Задание 1. Найти значения тригонометрических функций чисел $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi.$

Решение. Для решения задачи необходимо найти прямоугольные координаты точек тригонометрической окружности, соответствующих указанным числам, то есть точек $A=P_0=P_{2\pi}, B=P_{\frac{\pi}{2}}, C=P_\pi, D=P_{\frac{3\pi}{2}}$. Учитывая, что радиус тригонометрической окружности равен 1, имеем: $P_0(1;0), P_{\frac{\pi}{2}}(0;1), P_\pi(-1;0), P_{\frac{3\pi}{2}}(0;-1)$. Следовательно,

$$\sin 0=\sin 2\pi=0, \sin\frac{\pi}{2}=1, \sin\pi=0, \sin\frac{3\pi}{2}=-1,$$

$$\cos 0=\cos 2\pi=1, \cos\frac{\pi}{2}=0, \cos\pi=-1, \cos\frac{3\pi}{2}=0,$$

$$\mathrm{tg}0=\frac{\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0=\mathrm{tg}\pi=\mathrm{tg}2\pi, \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}, \mathrm{tg}\frac{3\pi}{2}$$ не существуют.

$$\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1}=0=\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{2}, \mathrm{ctg}0, \mathrm{ctg}\pi$$ не существуют,

Аналогично ибо на нуль

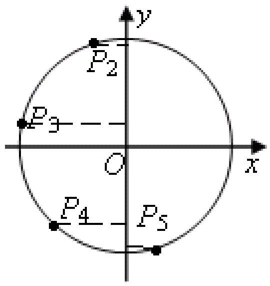
делить нельзя.

Задание 2. Определить знаки чисел: sin 20°; cos 130°; tg 214°; ctg 356°.

Решение. Построим на тригонометрической окружности точки, соответствующие углам вращения на 20°; 130°; 214°; 356° (рис. 26). Далее, воспользовавшись определениями тригонометрических функций, будем иметь: $\sin 20° > 0$, $\cos 130° < 0$, $\mathrm{tg}214° = \dfrac{\sin 214°}{\cos 214°} > 0,\quad \mathrm{ctg}356° = \dfrac{\cos 356°}{\sin 356°} < 0$.

Задание 3. Расположить по возрастанию числа: sin2, sin3, sin4, sin 5.

Изобразим на тригонометрической окружности точки P_2, P_3, P_4, P_5 (рис. 29). Видим, что ординаты точек P_4 и P_5 отрицательны, но ордината точки P_5 больше по модулю, поэтому она является наименьшей среди ординат четырех точек. Ординаты точек P_2 и P_3 положительны, причем, ордината точки P_2 больше, поэтому она является наибольшей среди ординат четырех точек. Следовательно, $\sin 5 < \sin 4 < \sin 3 < \sin 2$



(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. Сформулируйте определения синуса, косинуса, тангенса, котангенса в прямоугольном треугольнике.

1.2. Сформулируйте определение единичной окружности.

1.3. Приведите определение синуса, косинуса на единичной окружности.

1.4. Приведите определение линии тангенса, линии котангенса.

1.5. В чем состоит алгоритм определения синуса через единичную окружность?

1.6. В чем состоит алгоритм определения косинуса через единичную окружность?

1.7. В чем состоит алгоритм определения тангенса через единичную окружность?

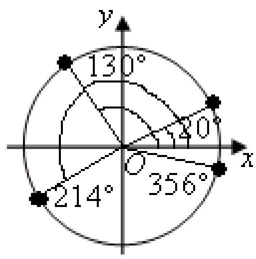
1.8. В чем состоит алгоритм определения котангенса через единичную окружность?

2. Решите предложенные задания (письменно):

2.1. Расположить по возрастанию числа: $\cos\frac{\pi}{8}, \cos\frac{5\pi}{7}, \cos\frac{10\pi}{9}, \cos\frac{5\pi}{3}$

2.2. Возможно ли равенство $1 + \cos t = 3$?

2.3. Может ли синус некоторого числа равняться $\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}$?



Отчетность

Работы принимаются до 20 января 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 13.01.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:
ОД.07 Математика 13.01.25 (Иванов Иван, ТТГ 1/1-9/25)
Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате: https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGIy
С уважением!
Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ
Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.