Banque « Agro »

A et AE – 0302

PHYSIQUE

QUELQUES ASPECTS DE LA CIRCULATION SANGUINE

A) LE CŒUR, MOTEUR DE LA CIRCULATION SANGUINE :

A-1

Le fluide sang reçoit du travail de la part du cœur : le cycle est donc récepteur, c'est-à-dire que le travail algébriquement reçu par le sang est positif. Or ce travail est : $W = -\oint_{cycle} PdV$ est positif si, et seulement si le cycle est décrit dans le sens trigonométrique, qui est donc le sens effectif de description du cycle.
Le raisonnement précédent ne fait pas intervenir P_0, qui ne joue donc aucun rôle ici

A-2-1

Le travail W fourni par le cœur est le travail reçu par le sang, c'est-à-dire l'aire (positive) du trapèze ABCD :

$$W_{fourni/cycle} = \frac{1}{2}(P_C - P_D + P_B - P_A)(V_A - V_C) = \frac{1}{2}(P_B + P_C - 2P_A)(V_A - V_C) \quad (1)$$

L'équation (1) montre que seules interviennent des différences de pression, donc P_0 n'intervient pas (ou encore : $-\oint_{cycle} P_0 dV = 0$)

A-2-2

$W_{fourni/cycle} = 0{,}72J$

A-3

$$P_{fournie\ par\ le\ coeur} = \frac{W_{fourni/cycle}}{\text{durée d'un cycle}} = 0{,}84 \quad W$$

B) QUELQUES CALCULS DE PUISSANCES :

B-1) a)

$$P_g = \frac{E^2}{R}$$

B-1)b)

$$P_J = \frac{E^2}{R}$$

B-1) c)

$\rho = 1$: toute la puissance fournie par le générateur est consommée dans la résistance R

B-1) d)

$P_g = 1{,}44$ W

L'ordre de grandeur est sensiblement le même que celui de P calculée à la question A-3

B-2) a)

$$P_g = E.I = \frac{E^2}{R+r}$$

B-2) b)

$$P_J = RI^2 = R\left(\frac{E}{R+r}\right)^2 = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$$

B-2) c)

$$\rho = \frac{\frac{RE^2}{(R+r)^2}}{\frac{E^2}{R+r}} = \frac{R}{R+r} = \frac{1}{1+\frac{r}{R}} < 1$$

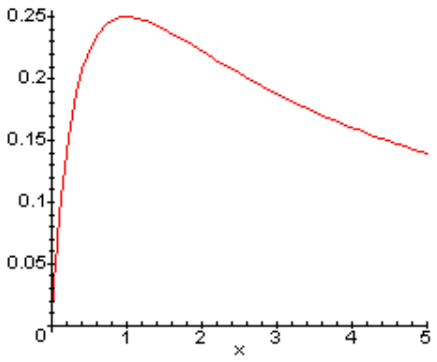
on voit sur l'expression (2) que, pour E et r fixés, ρ augmente si R augmente et tend vers 1 lorsque R devient très grand devant r : on a donc intérêt à choisir R >> r

B-2) d)

$$P_J = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$$

donc : $\frac{dP_J}{dR} = \frac{E^2(r-R)}{(R+r)^3}$ s'annule pour R = r ; l'extremum est un maximum et $P_{J\,max} = \frac{E^2}{4R}$

B-2) e)



Il n'y a pas contradiction : les notions de rendement et de puissance sont différentes, mais il faut choisir (en fonction des contraintes…) pour l'optimisation

B-3) a)
On a un montage suiveur

B-3) b)
l'AO étant idéal, les courants d'entrée sont nuls, donc : $P_g = 0$

B-3) c)

$$P_J = \frac{E^2}{R}$$

B-3) d)
$\rho \to \infty$

l'énergie est fournie par les générateurs de tension qui polarisent l'AO

B-4) a)

$$\underline{I} = I_m \exp(j\varphi) = \frac{E_m}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

par la méthode complexe :

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\varphi = -\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

d'où :

B-4) b)

$$< P_J >= \frac{1}{2} R I_m{}^2 = \frac{R E_m{}^2}{2\left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right]}$$

B-4) c)

$$< P_g >=< e(t).i(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T E_m \cos\omega t . I_m \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{E_m I_m \cos\varphi}{2}$$

$$\cos\varphi = Re(\underline{I}) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$$

or :

$$< P_g >= \frac{R E_m{}^2}{2\left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right]}$$

en utilisant les résultats de la question B-4)a, on en déduit :

$$\rho = \frac{< P_J >}{< P_g >} = 1$$

donc : $<P_g> = <P_J>$ et : en valeur moyenne temporelle, toute l'énergie fournie par la générateur est cnsommée dans la résistance

C) ECOULEMENT DU SANG DANS UNE VEINE OU UNE ARTERE :

C-1)

C-1-1) La viscosité traduit les frottements internes entre les différentes couches d'un fluide

C-1-2) L'équation de Navier-Stokes montre que, puisqu'on néglige la pesanteur et compte tenu de la forme de la vitesse, la pression P ne dépend que de r. On considère alors le fluide contenu dans le volume de contrôle suivant : un cylindre de rayon r situé entre les cotes z_A et z_B et on dit qu'en régime permanent la force résultante s'exerçant sur ce fluide est nulle :

$$(P_A - P_B)\pi r^2 + \eta\left(\frac{dv}{dr}\right)_r 2\pi r L = 0$$

d'où :

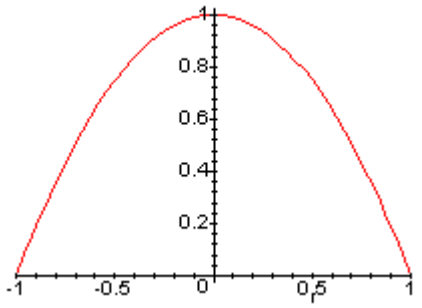
$$(P_A - P_B) = -2\eta \frac{L}{r}\frac{dv}{dr}$$

qui est la relation demandée

dans un liquide sans viscosité : $\eta = 0$ et : $P_A - P_B = 0$

C-2-1)

La vitesse v(r) étant nulle en r = a, l'intégration de (4) par rapport à r entre r et a conduit à l'équation demandée : $v(r) = \frac{P_A - P_B}{4\eta L}\left(a^2 - r^2\right)$



$v_M = \frac{(P_A - P_B)a^2}{4\eta L}$

C-2-2) a) Le débit de volume à travers la canalisation est le volume traversant par unité de temps une section droite de la canalisation ; c'est le flux du champ de vitesse à travers une telle section

L'écoulement étant permanent, pour une section droite donnée, ce débit est une constante par rapport au temps

L'écoulement étant incompressible, ce débit est le même à travers toute section droite de la canalisation

C-2-2) b)

$$Q = \iint_{\text{section}} v(r)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^a v(r)2\pi r\,dr = \int_0^a \frac{P_A - P_B}{4\eta L}\left(a^2 - r^2\right)2\pi r\,dr = \frac{P_A - P_B}{4\eta L}2\pi\left[\frac{r^4}{4} - a^2\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=a}$$

d'où : $Q = \frac{(P_A - P_B)\pi a^4}{8\eta L}$ loi de Poiseuille

C-2-2) c) analogies :

écoulement	électrocinétique
$P_A - P_B$	$V_A - V_B$
Q	I

$\frac{P_A - P_B}{Q}$ est la résistance hydraulique ou d'écoulement

C-2-3) a)

On réalise une moyenne intégrale : $$v_m = \frac{\iint_{section} v dS}{\iint_{section} dS} = \frac{\int_0^a v(r) 2\pi r dr}{\pi a^2} = \frac{Q}{\pi a^2}$$

On a donc bien la relation de définition indiquée

D'après la loi de Poiseuille : $$v_m = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{(P_A - P_B)a^2}{8\eta L}$$

C-2-3) b) D'après le résultat de la question C-2-3-a) : $Q = \pi a^2 v_m$

C-2-3) c) D'après l'expression obtenue pour v(r) : $$v_M = \frac{(P_A - P_B)a^2}{4\eta L} = 2v_m$$

C-2-4) a) v_m(aorte) = 0,264 $m.s^{-1}$

v_m(capillaire) = $4,15.10^{-4} m.s^{-1}$

C-2-4) b) $\frac{P_A - P_B}{L}$ (aorte) = 42,3 $Pa.m^{-1}$

$\frac{P_A - P_B}{L}$ (capillaire) = $6,64.10^4$ $Pa.m^{-1}$

La circulation est très difficile dans les capillaires

On n'a pas tenu compte du fait que la viscosité du sang est en fait fonction de la taille du vaisseau dans lequel il circule (cf partie D), on a négligé la pesanteur et on a supposé un régime permanent établi, toutes hypothèses fausses…

C-2-5) a)

$$[R_E] = \frac{[v][a][\rho]}{[\eta]} \quad \text{où :} \quad [\eta] = \frac{[F][L]}{[S][v]} = kg.m^{-1}.s^{-1}$$

donc : $$[R_E] = \frac{m.s^{-1}.m.kg.m^{-3}}{jk.m^{-1}.s^{-1}} = 1$$

C-2-5) b) R_E est un nombre sans dimension, qui compare le flux convectif de quantité de mouvement au flux diffusif de quantité de mouvement ou le temps caractéristique de diffusion au temps caractéristique de convection. Quand R_E est petit, on a un écoulement rampant ; quand R_E et grand, on a un écoulement turbulent

C-2-5) c)

$R_E(\text{aorte}) = 2{,}72.10^{3}$

$R_E(\text{capillaire}) = 4{,}27.10^{-3}$

Dans un capillaire, on a un écoulement rampant, donc laminaire
Dans l'aorte, R_E est trop grand pour que l'écoulement soit laminaire : l'écoulement est déjà turbulent et l'hypothèse d'un écoulement laminaire n'est pas valide

D) ETUDE DE LA VISCOSITE DU SANG :

D-1) C est la limite de η lorsque a tend vers l'infini (c'est-à-dire : a >> d)
AN : C = 0,002

D-2) On peut soit utiliser un tableau ln(η) et ln(1+d/a) et faire une régression, soit se contenter, à la rigueur, d'un ou deux points pour en déduire n

AN : on obtient : $n \approx 2$

D-3) Dans le cas du sang, il se forme des agrégats d'hématies ; le sang n'est pas un liquide homogène

E) PRISE EN COMPTE DU CARACTERE NON PERMANENT DE L'ECOULEMENT DU SANG :

E-1)
Avec des notations évidentes :

$$R_2 i_2 + R_1 i_1 = R_2 i_2 + R_1 (i_2 + C i_C) = R_2 i_2 + R_1 \left(i_2 + C \frac{d(R_2 i_2)}{dt} \right) = e(t)$$

donc :
$$(R_1 + R_2) i_2 + R_1 R_2 C \frac{di_2}{dt} = e(t)$$

E-2)
Si on note E la valeur constante de e(t) sur une demi période, on a donc à résoudre :

$$(R_1 + R_2) i_2 + R_1 R_2 C \frac{di_2}{dt} = E$$

où : $E = E_1$ si $0 \le t < \frac{T}{2}$

$E = E_2$ si $\frac{T}{2} \le t < T$

$$\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 C}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

Donc, si on pose : , on obtient :

Pour la première demi période : $i_2 = A.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E_1}{R_1 + R_2}$ (A=constante)

Pour la deuxième demi période : $i_2 = B.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E_2}{R_1 + R_2}$ (B=constante)

On obtient A et B en écrivant la continuité de $i_2 = \frac{u_C}{R_2}$ en t = T/2 et t = T

On obtient alors :

$$A = -\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}$$

$$B = -A = +\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}$$

d'où

Pour la première demi période : $i_2 = -\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E_1}{R_1 + R_2}$

Pour la deuxième demi période : $i_2 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)}.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E_2}{R_1 + R_2}$

E-3) On obtient exactement l'allure du débit dans une artère donnée sur les figures 5 et 6

Lorsque R_2 augmente, la constante de temps τ augmente.

E-4)

Analogie :

écoulement	électrocinétique
pression	tension
débit de volume	intensité
résistance hydraulique ou d'écoulement	résistance électrique
pompe (cœur)	générateur de tension

F) **OBSERVATION EXPERIMENTALE D'UN ECOULEMENT :**

F-1)

F-1-1)

Principe : $A \xrightarrow{L1} A_i \xrightarrow{L2} A' = O'$

Équation de conjugaison pour L_1 : $\dfrac{1}{\overline{O_1A_i}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f'_1}$; donc : $\dfrac{1}{\overline{O_1A_i}} - \dfrac{1}{(-x)} = \dfrac{1}{f'_1}$

Équation de conjugaison pour L_2 : $\dfrac{1}{\overline{O_2A'}} - \dfrac{1}{\overline{O_2A_i}} = \dfrac{1}{f'_2}$; donc : $\dfrac{1}{D-d} - \dfrac{1}{\overline{O_1A_i} - d} = \dfrac{1}{f'_2}$

$$\frac{1}{D-d} - \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{f'_1} - \dfrac{1}{x}} - d} = \frac{1}{f'_2}$$

D'où, finalement :

F-1-2)

$$\gamma = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_i}} \cdot \frac{\overline{O_1A_i}}{\overline{O_1A}} = \frac{D-d}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{f'_1} - \dfrac{1}{x}} - d} \cdot \frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{f'_1} - \dfrac{1}{x}}}{(-x)} = \frac{D-d}{\left(1 - d\left(\dfrac{1}{f'_1} - \dfrac{1}{x}\right)\right)(-x)} = \frac{(D-d)f'_1}{f'_1 x - d(x - f'_1)}$$

F-1-3) a)

AN : d = 4 cm

d = 7 cm

F-1-3) b)

AN : $\gamma = \dfrac{10-d}{1-d}$ $\gamma = +2$

$\gamma = +0{,}5$

la méthode évoque la méthode de Bessel de détermination des distances focales

F-2) L'œil n'accommodant pas, il voit nettement une image située à l'infini : A' est donc à l'infini, donc : $A_i = F_2$

On a alors : $\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{(-x)} = \frac{1}{f'_1}$; donc : $\frac{1}{d-2} + \frac{1}{1} = 2$

D'où : d = 3 cm

F-3)

F-3-1) Il faut se placer dans les conditions de Gauss :

- Rayons faiblement inclinés par rapport à l'axe optique
- Rayons frappant les dioptres au voisinage des sommets de ceux-ci, c'est-à-dire au voisinage de l'axe optique

F-3-2) La diminution du diamètre de L_1 provoquera une diminution de luminosité et une augmentation du phénomène de diffraction