

OPTIQUE

Etude d'un modèle simplifié de guidage de rayons lumineux.

1. On considère la structure présentée sur la figure 0.1, constituée de trois milieux transparents plans (M_1), (M_2) et (M_3), d'épaisseurs respectives e_1 , e_2 et e_3 , d'indices absolus de réfraction n_1 , n_2 et n_3 , les milieux (M_1) et (M_3) étant identiques. Cette structure est plongée dans un milieu (M_0) d'indice absolu n_0 . Un rayon (R_0) est incident en un point I sur le premier dioptré (A'A) sous un angle i . A la sortie de la structure, le rayon est intercepté sur un écran (E) placé à la distance h du dioptré (D'D). Les positions sur l'écran sont repérées sur un axe $x'x$ dont l'origine 0 est la projection, perpendiculairement aux dioptrés, du point d'incidence I (figure 0.1). Le dioptré C'C présente une tache (Γ) visible par un observateur placé à gauche de la structure. Pour les calculs, on prendra les valeurs numériques suivantes: $i = 30^\circ$; $n_0 = 1$; $n_1 = 1,33$; $n_2 = 1,50$; $e_1 = 5\text{mm}$; $e_2 = 10\text{mm}$; $h = 5\text{cm}$.

Les distances seront calculées à $\pm 0,1\text{ mm}$ près.

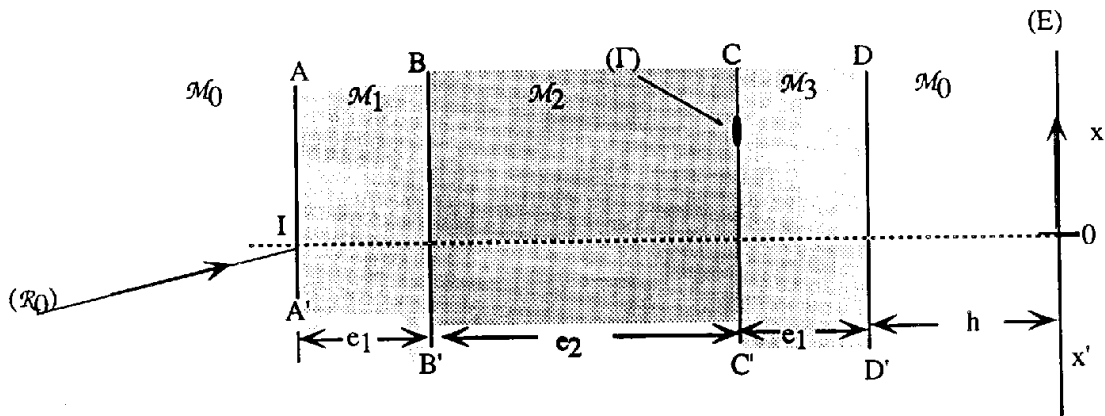


Fig. O.1

1.1 - Exprimer l'angle de réfraction r_1 du rayon dans le milieu (M_1) en fonction de i et de n_1 et n_0 . Calculer r_1 .

1.2 - Exprimer l'angle de réfraction r_2 du rayon dans le milieu (M_2) en fonction de n_1 , n_2 et r_1 . Calculer r_2 .

1.3- En utilisant des considérations simples, indiquer quelle est la direction du rayon qui émerge de la structure.

1.4 - Exprimer le chemin optique L suivi par le rayon (R_0) pour passer du point d'incidence I sur le dioptré A'A, jusqu'à l'écran (E) en fonction de e_1 , n_1 , r_1 , e_2 , n_2 , r_2 , h , i et n_0 . Calculer L .

1.5 - Soit L_0 le chemin optique suivi par le rayon (R_0) pour aller du point I à l'écran (E) en l'absence des milieux (M_1), (M_2) et (M_3). Calculer la différence ΔL entre le chemin optique L calculé en 1.4 et L_0 .

1.6 - Exprimer la distance X entre le point d'impact du rayon sur l'écran (E) et l'origine O de l'axe $x'x$ en fonction de e_1 , e_2 , r_1 , r_2 , h et i .

Calculer X .

1.7 - Un observateur placé dans le milieu (M_0) regarde suivant une direction proche de la normale à ($A'A$), en direction de la tache (Γ) (figure 0.1). A quelle distance d de la surface $A'A$ semble se trouver la tache ? Exprimer d en fonction de n_0 , e_1 , e_2 , n_1 , n_2 .

Calculer d .

2. Les trois milieux (M_1), (M_2) et (M_3) définis précédemment, d'indice n_1 , n_2 et n_1 , d'épaisseurs e_1 , e_2 et e_1 , sont maintenant disposés comme indiqué sur la figure 0.2. On définit un repère orthogonal (Ox , Oy , Oz) tel que

- l'axe Oz est perpendiculaire aux surfaces séparant les milieux

- le plan xOy est parallèle à ces surfaces et coupe (M_2) à égale distance de (M_1) et (M_3). Les

indices des différents milieux sont tels que $n_2 > n_1 = n_3 > n_0$. La structure a une longueur D suivant la direction de Ox .

Un rayon lumineux (R_0) est incident sous un angle i en un point I situé au centre de la face d'entrée $A'A$; le plan d'incidence coïncide avec le plan xOz .

Applications numériques: $n_0 = 1$; $n_1 = 1,33$; $n_2 = 1,50$; $D = 20$ cm.

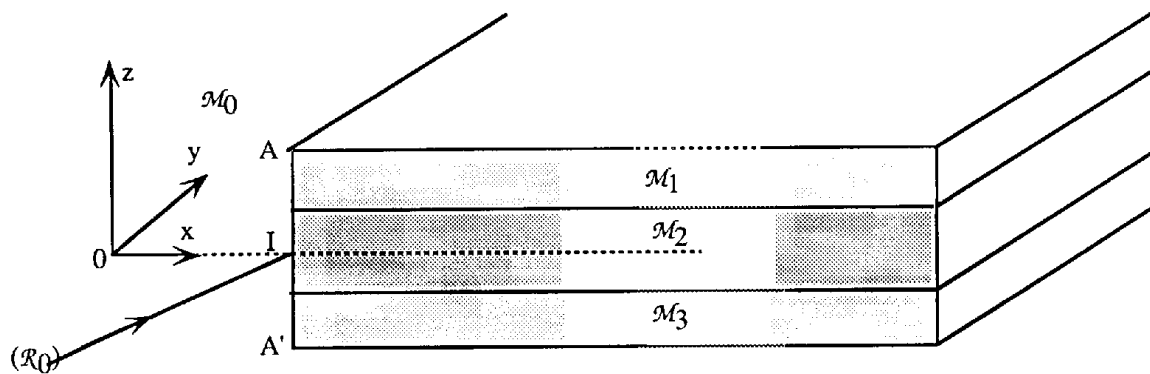


Fig. O.2

2.1 - Montrer qu'il existe une famille de rayons incidents qui ont la particularité de ne pas pénétrer dans les milieux (M_1) et (M_3). Exprimer l'angle d'incidence $i_{\max}$ de ces rayons en fonction de n_1 , n_2 et n_0 .

Calculer $i_{\max}$ en arrondissant au degré près.

2.2. - Soient deux rayons incidents sur la face d'entrée $A'A$, l'un parallèle à l'axe Ox et l'autre à l'incidence maximale $i_{\max}$ définie en 2.1.

Exprimer la différence ΔL_2 de chemin optique suivi par les deux rayons au cours de leur cheminement le long du milieu (M_2) en fonction de D , n_1 et n_2 .

Calculer ΔL_2 .

2.3 - Calculer la différence Δt de temps mis par la lumière pour parcourir les deux chemins définis en 2.2.

3. On suppose maintenant que le milieu (M_2), avec la même épaisseur e_2 que précédemment, est constitué de M couches d'épaisseurs identiques e_2/M , M étant un nombre entier impair. Les

indices décroissent d'une quantité $\Delta n = 2 \frac{n_2 - n_1}{M + 1}$ d'une couche à l'autre du milieu vers les bords. La figure 0.3 montre le cas où $M = 5$.

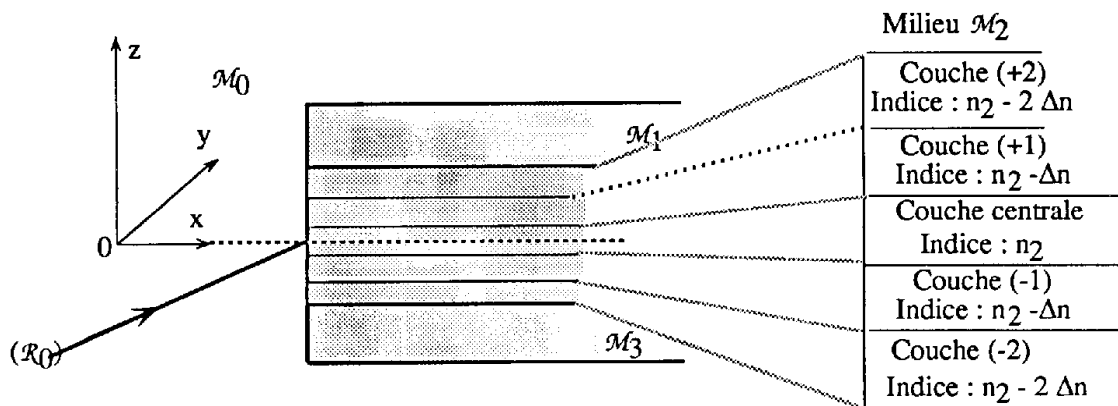


Fig. O.3

3.1 Exprimer l'indice de la couche de (M_2) en contact avec (M_1) ou (M_3) pour le cas général de M couches. Calculer cet indice pour $M = 5$.

3.2 - Exprimer, dans le cas d'un milieu (M_2) à 5 couches, en fonction de n_0 , n_1 et n_2 , l'angle d'incidence limite $i_{\max}$ pour que le rayon (R_0) ne pénètre pas dans le milieu (M_1).

3.3 - Que devient l'angle $i_{\max}$ calculé ci-dessus dans le cas où le nombre de couches M tend vers l'infini ?

3.4 - Dessiner sur le même dessin les trajets du rayon lumineux (R_0) à l'intérieur du milieu (M_2) dans les cas suivants en supposant que le nombre de couches est infini

- l'angle d'incidence est inférieur à $i_{\max}$
- l'angle d'incidence est égal à $i_{\max}$
- l'angle d'incidence est supérieur à $i_{\max}$.

3.5 - En vous inspirant des conditions du présent exercice expliquer brièvement et qualitativement le phénomène du 'mirage' bien connu des voyageurs du désert.

MECANIQUE

1) Interaction gravitationnelle de 2 masses quelconques .

On considère le système matériel formé de 2 sphères homogènes (S_1, S_2) , de rayons respectifs r_1 , r_2 et de masses respectives m_1, m_2 en interaction gravitationnelle de constante $G = 6,67.10^{-11}$. (figure M.1).

O est le centre de gravité du système;

O_1, O_2 sont les centres de gravité respectifs de chacune des sphères.

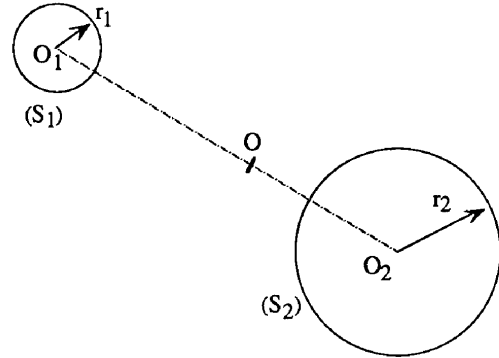


Fig. M.1 : Système matériel

On pose $\vec{r} = O_1O_2$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ et $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$, et on se place dans un référentiel galiléen de centre O.

1.1 - Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du système en fonction de r , v et μ .

Préciser:

- pourquoi l'énergie se conserve
- de quel paramètre initial elle peut dépendre
- quelles sont les limites sur r ou v eu égard à la validité de cette expression.

1.2 - Donner de même l'expression de son moment cinétique $\vec{\sigma}$ en O. Y a-t-il conservation de cette quantité ? Préciser le type de mouvement obtenu.

2. Interaction gravitationnelle de 2 masses réelles: application au système terre-satellite

On considère à présent le système formé par la terre (T) de masse $M = 5,976.10^{24}$ kg, de rayon $R_T = 6400$ km et un satellite (S) de masse $m = 800$ kg.

2.1 - Déterminer la position du centre de gravité O du système et calculer l'erreur relative commise en considérant que celui-ci se situe au centre O_2 de la terre. Donner la valeur de μ et la comparer à la masse du satellite.

2.2- Dans ces conditions, que deviennent les expressions précédentes (Energie mécanique totale, et moment cinétique) ? Préciser en particulier ce que représente $\vec{v}$ dans ce cas particulier.

2.3 - La trajectoire du satellite étant repérée en coordonnées polaires (r, θ) par rapport à la terre, montrer par une méthode énergétique que l'équation différentielle du mouvement de ce satellite est de la forme: $\left(\frac{du}{dq}\right)^2 + (u - \beta)^2 = \beta^2 g$ ($u=1/r$)

On précisera les paramètres β et γ en fonction des données du problème.

On adoptera la notation $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

2.4- Déterminer la solution de l'équation précédente, et l'identifier à la forme habituelle de l'équation du mouvement de 2 corps en interaction gravitationnelle, soit

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{e.d} + \frac{\cos(q-q_0)}{d}$$

en explicitant les termes e et d en fonction des constantes β et γ .

Préciser nom et signification physique de e et d .

Faire le croquis correspondant à un repère dans lequel θ_0 est nul.

2.5 - Quelle est la condition sur e pour qu'un observateur terrestre voie apparaître le satellite de façon périodique ? Exprimer en fonction des données du problème la condition qui en découle sur E_0 , valeur de référence pour l'énergie.

2.6 - On rappelle que le périégée est le point de la trajectoire où r est minimal; soit a la valeur correspondante. Montrer que la vitesse du satellite au périégée notée v_p obéit à une équation bicarrée. Exprimer v_p en fonction de a, M, e et G.

2.7- A partir de la question précédente, exprimer puis calculer l'altitude h d'un satellite géostationnaire.

ELECTRICITE

CIRCUITS INDUSTRIELS EN COURANT ALTERNATIF

On étudie divers circuits électriques mettant en jeu des récepteurs à caractéristique linéaire alimentés par une ou plusieurs sources industrielles de tensions sinusoïdales de fréquence f (période T , pulsation ω).

On prendra pour les applications numériques $f = 50 \text{ Hz}$; $\omega = 314 \text{ rad.s}^{-1}$.

Notations et conventions

a) A toute grandeur sinusoïdale (courant ou tension) du type $y(t) = Y\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$, on associe le nombre complexe $\underline{Y}$ de module Y et

d'argument θ (θ algébrique).

b) Pour un dipôle (figure E.1), les grandeurs électriques instantanées sont:

- la tension: $v(t) = V\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha)$

- le courant: $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha - \varphi)$.

V et I représentent les valeurs efficaces de v et i ;

$\varphi = \arg v - \arg i$ est le déphasage

courant-tension.

1. Montrer que la puissance moyenne ou puissance active: $P = \frac{1}{T} \int v i \cdot dt$ reçue par le dipôle est

donnée par la formule: $P = VI \cdot \cos \varphi$.

2. Circuit alimenté par une source de tension sinusoïdale $E = 220 \text{ V}$.

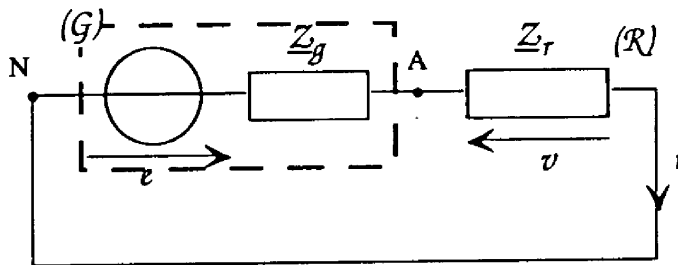


Fig. E.2

Un dipôle récepteur (R) est alimenté par une source de tension réelle (G) de force électromotrice (fém) $e = E\sqrt{2} \cdot \sin \omega t$ et d'impédance interne $\underline{Z}_g$ (figure E.2). $\underline{Z}_g$ est constituée d'une résistance r en série avec une inductance l . Le récepteur (R) est formé d'une résistance R en série avec une

réactance X . Soit $\underline{Z}_r$ son impédance.

2.1 - Exprimer sous forme littérale en fonction de E , r , l , R , X et ω :

2.1.1 - le courant $\underline{I}$,

2.1.2 - la tension $\underline{V}$,

2.1.3 - les puissances active P et réactive Q absorbées par le récepteur.

N.B.: On laissera les expressions complexes sous forme de fractions rationnelles du type

$$\frac{A + jB}{A' + jB'}$$

On prendra pour la suite: $r = 0,00600 \, \Omega$; $\sim = 32 \cdot 10^{-6} \, \text{H}$.

2.2 - Le récepteur (R) est formé par la mise en série d'une résistance R et d'une bobine d'inductance pure L . On donne $E = 220 \, \text{V}$; $R = 0,275 \, \Omega$; $L = 0,00152 \, \text{H}$. Calculer numériquement les valeurs efficaces V et I ainsi que les puissances active et réactive Q absorbées par le récepteur.

2.3

2.3.1 - Exprimer, en fonction de L et I , l'énergie électromagnétique W_L emmagasinée par la bobine quand le courant i varie de 0 à sa valeur maximale.

2.3.2 - Montrer que W_L est proportionnelle à la puissance réactive Q . Conclure sur la signification physique de la puissance réactive.

3. Circuit alimenté par une source de tension sinusoïdale de fém E réglable.

La source est maintenant réglable en valeur efficace dans le montage de la figure E.2.

3.1- Pour le même récepteur inductif et résistif, déterminer la valeur efficace E' qu'il faut donner à la fém pour que la tension v ait une valeur efficace égale à $220 \, \text{V}$. Déterminer numériquement la valeur efficace I' du courant, ainsi que les puissances active P' et réactive Q' absorbées par le récepteur. Calculer le facteur de puissance du récepteur.

3.2 - On fait subir à E' une variation de $\pm 5\%$. Quelles sont les variations correspondantes des valeurs efficaces du courant et de la tension, ainsi que des puissances active et réactive absorbées par le récepteur.

4. Idéalisation de la source de tension.

Evaluer la précision relative obtenue sur les courants, tensions et puissances lorsqu'on néglige dans les calculs l'impédance interne Z_g de la source.

5. Réseau industriel en régime sinusoïdal

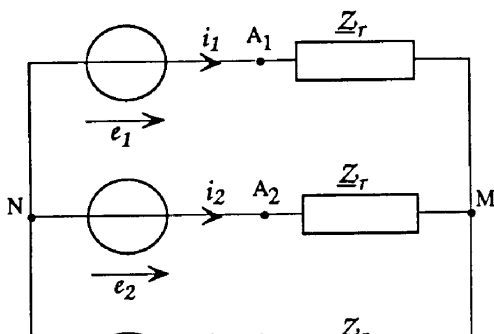
On réalise une source qu'on appelle "triphase" à l'aide de 3 générateurs de tension sinusoïdale d'impédances internes négligeables Z_g et de fém respectives e_1 , e_2 et e_3 ; définies ci-dessous:

$$e_1 = E\sqrt{2} \cdot (\sin \omega t)$$

$$e_2 = E\sqrt{2} \cdot \left(\sin \omega t - \frac{2P}{3} \right)$$

$$e_3 = E\sqrt{2} \cdot \left(\sin \omega t - \frac{4P}{3} \right)$$

5.1 - Propriété préliminaire: que peut-on dire de la somme $(e_1 + e_2 + e_3)$ à chaque instant ?



5.2 - Cet ensemble de générateurs alimente 3 récepteurs identiques formés d'une inductance $L = 0,00152 \, \text{H}$ en série avec une résistance $R = 0,275 \, \Omega$

(figure E.3). Déterminer les courants i_1 , i_2 et i_3 en valeurs efficaces et en phases ainsi que la tension ($v_N - v_M$). Calculer les puissances active totale P_t et réactive totale Q_t reçues par les récepteurs.

5.3 - On suppose qu'il se produit une coupure accidentelle en A3.

Déterminer les nouvelles valeurs des courants, les puissances active totale P_t' et réactive totale Q_t' reçues par les récepteurs, ainsi que la tension entre M et N.

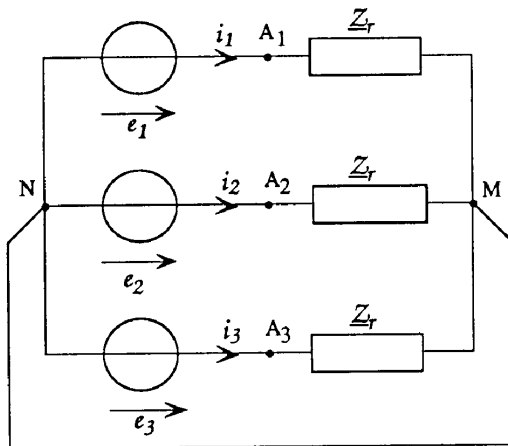


Fig. E.4

5.4 - Reprendre les questions 5.2 et 5.3 dans le cas où les points M et N seraient reliés par un conducteur de résistance nulle (figure E.4).

6. Relèvement du facteur de puissance.

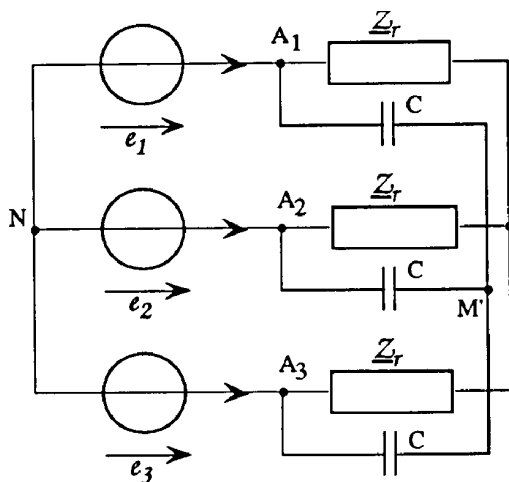


Fig. E.5

On dispose 3 condensateurs identiques conformément au montage de la figure E.5. Les fém e_1 , e_2 , e_3 et les impédances sont inchangées.

Soit $C = 1600 \mu F$ la capacité de chacun des condensateurs.

Déterminer les puissances actives P_t'' et réactive Q_t'' fournies par l'ensemble des 3 sources, ainsi que les valeurs efficaces des courants arrivant en A_1 , A_2 et A_3 .

Interpréter physiquement le rôle des condensateurs et conclure sur l'intérêt de ce montage par rapport à celui de la question 5.2.