

CONCOURS D'ENTREE 1995

EPREUVE DE PHYSIQUE

OPTION PHYSIQUE-MATHEMATIQUES

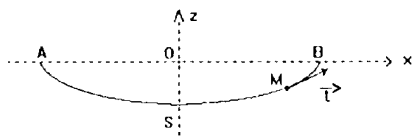
DUREE : 4 heures.

N.B. . Ce sujet comporte 5 pages de texte.

1er EXERCICE

I. Etude de l'équilibre d'un fil pesant et tendu :

Un fil parfaitement flexible, de section constante, de longueur $2L$, de masse linéique μ , est fixé par ses extrémités A et B dans un plan vertical xOz (Oz, verticale ascendante ; Ox, horizontale)



On pose $AO = OB = d$; sous l'action de son poids, le fil, à l'équilibre, prend une flèche, définie par la longueur $|\overline{OS}| = h$. Le point S est le point de cote minimale.

Un point M du fil est repéré par ses coordonnées cartésiennes x et z ou par son abscisse curviligne s , avec $s(S) = 0$.

On admet que la tension exercée au point M, par la partie MB du fil sur la partie AM est du type $T \cdot \vec{t}$ où $\vec{t}$ est le vecteur unitaire de la tangente au fil en M.

1. On considère un élément MN du fil, de longueur ds . Montrer que l'équilibre de cet élément se traduit par l'équation différentielle $d(T \cdot \vec{t}) + mg \vec{ds} = 0$.

2. a. En déduire les équations suivantes, où α et β sont 2 constantes $T \cdot dx/ds = \alpha$ $T \cdot dz/ds = \mu g s + \beta$.

b. Au point S, on note $T(S) = T_0$. Exprimer les constantes α et β .

3. On pose $a = T_0/(\mu g)$. On se propose de déterminer dans cette modélisation, l'équation $z(x)$ de la courbe prise par le fil:

a. Montrer que la fonction dérivée $z'(x) = s/a$.

b. En déduire que $z(x)$ est du type $a \cdot \text{ch}(x/a) + C$

Déterminer la constante C

On rappelle qu'une primitive de la fonction $1/\sqrt{u^2 + 1}$ est la fonction $\text{argsh}(u)$

4. Utiliser les résultats précédents pour établir des relations entre

a. les grandeurs L , d et a .

b. les grandeurs h , L et a .

c. les grandeurs T , T_0 , x et a .

5. Applications numériques

a. Un fil d'acier a les caractéristiques suivantes :

$L = 100$ m ; masse volumique : $7,9 \times 10^3$ kg/m³; $g = 9,8$ m/s² ; section circulaire uniforme de rayon 1,5 cm ; $T_0 = 13$ kN.

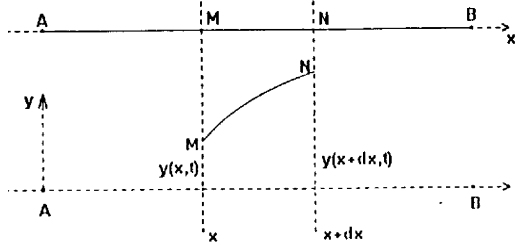
Calculer les valeurs numériques de μ , a , d , h .

Y a-t-il risque de rupture du fil si la tension limite est de 100 kN ?

b. Un fil d'acier a une longueur de 1 m; son diamètre est de 1 mm; T_0 vaut 4,7 kN. Calculer la flèche h ; conclusion ?

II Propagation d'ondes dans un fil tendu

On reprend le fil de la partie I.5.b. : à l'équilibre ce fil tendu entre les points A et B, est confondu avec l'axe Ax ; il est caractérisé par sa masse linéique μ , sa longueur $2L (= 2d = AB)$, sa tension uniforme T_0 .



On se propose d'étudier les petits déplacements du fil dans une direction orthogonale à Ax.

On considère un élément du fil MN de longueur dx ; à la date t , on note $y(x,t)$ le petit déplacement du point M et $y(x+dx,t)$ celui du point N : on néglige l'action de la pesanteur et on admet que la norme de la tension vaut toujours T_0 .

1. En raisonnant sur l'élément MN, montrer que le mouvement est décrit par une équation du type

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0.$$

2. Quelle est l'expression littérale de la vitesse de phase des ondes dans ce fil ?

Application numérique ? (valeurs de la question I.5.)

3. On souhaite que les solutions $y(x,t)$ soient du type stationnaire sinusoïdal $y(x,t) = y_0 \cdot \cos(k \cdot x + j) \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$ où y_0 , ϕ et ψ sont des constantes.

a. Etablir la relation liant k à la pulsation ω .

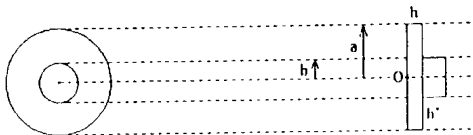
b. Quelle est la fréquence ν_0 du mode fondamental (valeur la plus petite de la fréquence), exprimée en fonction de v (vitesse de phase) et de L ?

c. Quelles sont les valeurs numériques des fréquences possibles inférieures à 2000 Hz ?

2ème EXERCICE

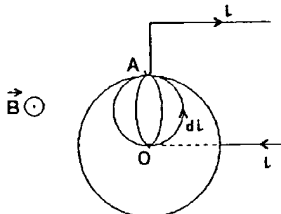
On considère un disque métallique de centre O, de rayon a , d'épaisseur faible h , de masse volumique μ ; un cylindre isolant, coaxial, est solidaire du disque, son rayon vaut b , son épaisseur h' , sa masse volumique μ' .

1. Moment d'inertie par rapport à l'axe de symétrie cylindrique :



Ecrire l'expression du moment d'inertie J_Δ de l'ensemble disque, cylindre, par rapport à l'axe Δ , axe de symétrie cylindrique : On exprimera J_Δ en fonction des données. Calculer numériquement J_Δ : $a = 10 \text{ cm}$; $b = 1 \text{ cm}$; $h = 2 \text{ mm}$; $h' = 2 \text{ cm}$; $\mu = 2,56 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$; $\mu' = 950 \text{ kg/m}^3$.

2. Moment des forces de Laplace :



L'ensemble précédent (cylindre isolant non représenté) est inséré entre les points O et A dans un circuit électrique traversé par un courant d'intensité i ; dans le disque conducteur, considéré comme plan les lignes de courant s'épanouissent. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, orthogonal au plan du disque

En raisonnant d'abord sur une ligne de courant traversée par un courant d'intensité i , établir soigneusement l'expression du moment en O des forces de Laplace exercées sur le disque.

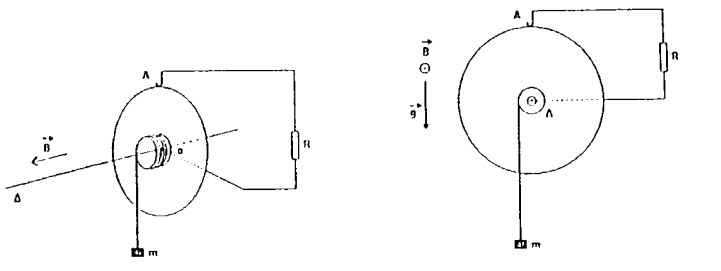
On exprimera ce moment en fonction de i , a et B .

3. Champ électromoteur et f.e.m. induite :

Le disque conducteur est mobile autour de l'axe Δ ; il est toujours plongé dans le champ B .

- Etablir l'expression du champ électromoteur au point M
- En déduire la f.e.m. entre les points O et A.
- Comment le signe de cette f.e.m., en vous appuyant sur résultat de la question 2.

4. Etude d'un dispositif



L'axe de rotation Δ est placé horizontalement, ainsi que les lignes du champ magnétique B ; le circuit électrique comporte uniquement une résistance R . Sur le cylindre est enroulé un fil inextensible, sans masse ; on néglige tout glissement du fil et tout frottement au niveau de l'axe ou des contacts.

Le fil supporte à son extrémité une masse m ; l'ensemble est lâché sans vitesse initiale.

a. On note ω la vitesse angulaire du système disque-cylindre autour de l'axe Δ ; établir, en expliquant soigneusement le raisonnement, l'équation différentielle vérifiée par ω .

b. Quelle est en fonction de m , g , R , b , a et B l'expression de la vitesse angulaire limite ω_L ?

c. On pose $J = 4.R(J_\Delta + mb^2)/(B^2a^4)$; simplifier l'équation différentielle en utilisant ω_L et J .

d. A quelle date t_0 , le système atteint-il la vitesse limite à 10 % près ?

Quelle est, à cette date, le nombre de tours effectués par le système, n ?

e. Application numérique: $R = 0,5 \, \Omega$; $m = 10 \, \text{g}$; $B = 0,5 \, \text{T}$. Calculer J , t_0 et n .