

Дисциплина: ОД.07 Математика

Занятие № 39

Группа ТТГ 1/1-9/25

Дата: 10.11.2025

Тип занятия: лекция 20

Преподаватель: Бережная В.А.

Тема занятия: Повторение планиметрии. Основные понятия стереометрии

Цель занятия:

Деятельностная:

– создать условия для формирования системы знаний, связанных с понятиями взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве.

Содержательная:

- сформировать представление о стереометрии, как о разделе математики;
- расширить знания учеников за счет включения новых определений: стереометрия, плоскость;
- актуализировать знания об основных фигурах планиметрии и площади плоских фигур;
- закрепить теоретический материал при выполнении практических заданий.

План занятия:

1. Повторение планиметрии.
2. Предмет стереометрии. Основные понятия.
3. Основные пространственные фигуры.

Ход занятия

1. Повторение планиметрии

Геометрические фигуры на плоскости

Самая малая геометрическая фигура – это **точка**. Она не имеет измерительных особенностей и характеристик: не содержит длины, высоты, объема, площади.

Линия – фигура, которая состоит из множества соединенных между собой точек, расположенных последовательно друг за другом.

Линии бывают прямыми, кривыми и ломаными.

Отрезок – часть прямой линии, ограниченная с двух сторон точками.

Луч – направленная полупрямая, у которой есть точка начала, но нет конца.

Угол – геометрическая фигура, образованная двумя лучами (сторонами угла), выходящими из одной точки (которая называется вершиной угла).

Треугольник – это геометрическая фигура, состоящая из трех точек, попарно соединенных между собой отрезками. Точки называются вершинами треугольника, отрезки – сторонами треугольника. Треугольник имеет три вершины и три стороны. Стороны треугольника обозначаются часто малыми буквами, которые соответствуют заглавным буквам, обозначающим противоположные вершины.

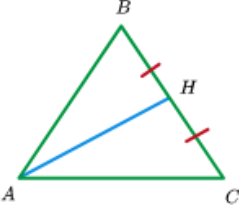
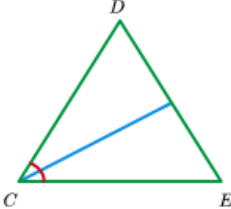
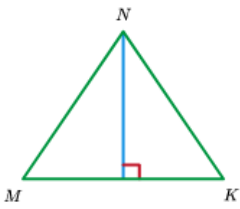
Виды треугольников по углам:

1. Остроугольный треугольник – все углы которого острые (градусная мера каждого угла меньше 90°).
2. Прямоугольный треугольник – один угол прямой (градусная мера 90°).
3. Тупоугольный треугольник – один угол тупой (градусная мера больше 90°).

Виды треугольников по сторонам:

1. Равносторонний треугольник (или правильный треугольник) – все три стороны равны.
2. Равнобедренный треугольник – две стороны равны.
3. Разносторонний треугольник – все стороны имеют разную длину.

Элементы треугольника

Медиана	Биссектриса	Высота
это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.	это отрезок, делящий угол треугольника на две равные части.	это перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.
		

Четырехугольник – это фигура, состоящая из четырёх точек (вершин) и четырёх отрезков (сторон), последовательно соединяющих вершины.

При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться.

Существуют следующие виды четырехугольников:

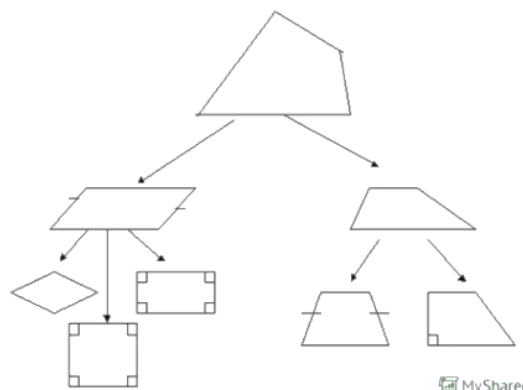
Трапеция – четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие – не параллельны.

Параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны.

Прямоугольник – параллелограмм, у которого все углы прямые.

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны; это ромб, у которого все углы прямые.



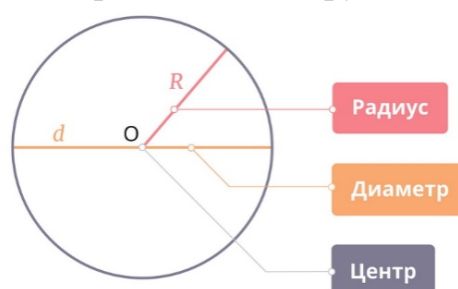
Окружность – это множество всех точек, находящихся на одинаковом расстоянии от заданной точки, которая называется центром окружности.

Элементы окружности: центр, радиус, диаметр.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой.

Диаметр – это хорда, проходящая через центр окружности.

Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью.



Понятие площади

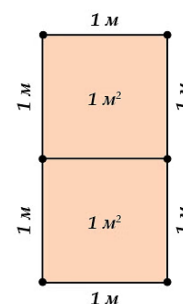
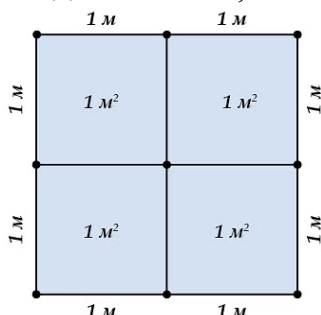
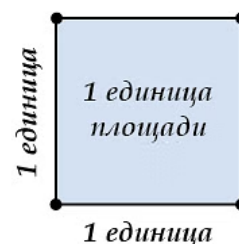
Давай начнем с самого простого. За основу берется тот факт, что: площадь квадрата со стороной, равной 1 единице длины, равна 1 единице площади.

Другими словами, площадь квадрата со стороной 1 метр мы считаем одним «метром площади».

Но писать все время «метр площади» и слишком длинно, и звучит как-то странно. И вот, математики придумали название «метр квадратный» и обозначение «м²»

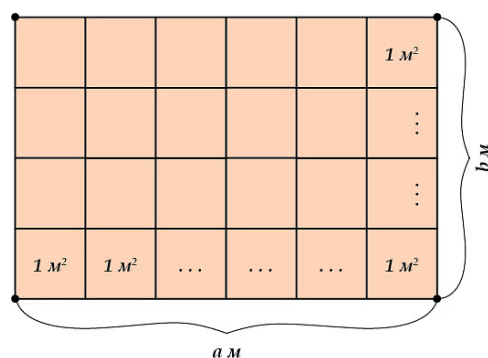
А вот теперь хитрый вопрос: а что такое 2м²? Площадь квадрата со стороной 2м?

А вот и нет! Смотри: квадрат со стороной 2м. Пересчитай-ка, сколько в нем квадратных метров? Удивительно, но получается 4!

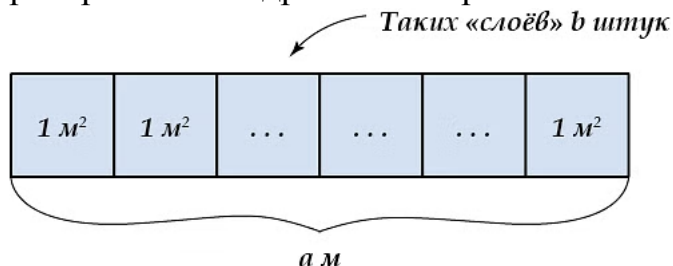


А чтобы получить 2 квадратных метра (то есть, 2м²), мы должны нарисовать, например так: Видишь, здесь действительно нарисовано 2 квадратных метра?

Да и вообще, если мы возьмем прямоугольник, у которого стороны равны а метров и b метров, то в этом прямоугольнике...



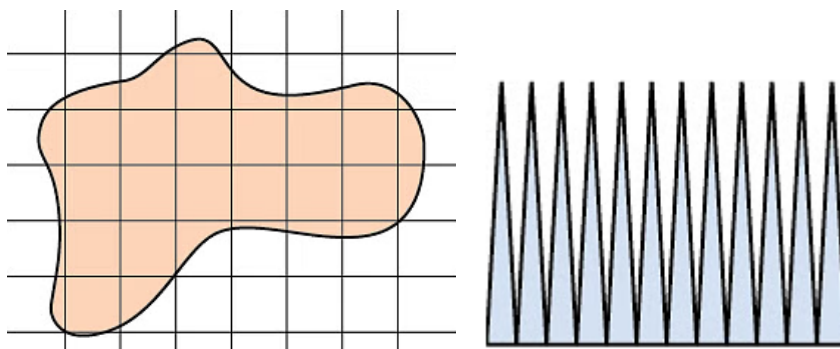
...поместится ровно $a \cdot b$ квадратных метров. Посмотри внимательно: у нас есть b «слоев», в каждом из которых ровно a квадратных метров.



Значит, всего в прямоугольнике размером $a \times b$ поместилось ab квадратных метров. Вот это число, сколько квадратных метров поместилось в прямоугольнике, и есть его площадь.

А если фигура – вовсе не прямоугольник, а какая-то абракадабра?

Можно ли узнать, сколько квадратных метров в ней находится? Можно ведь некоторые квадратные метры «порезать», переставить и т.д. ?..



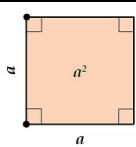
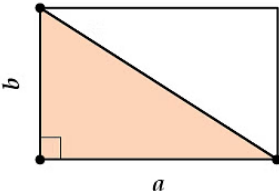
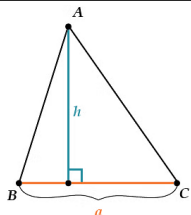
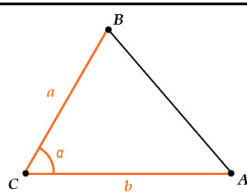
Бывают такие фигуры, для которых совершенно невозможно установить сколько там квадратных метров. Даже приблизительно! К сожалению, нарисовать такие фигуры – невозможно. Но они есть! Они похожи, например, на такую «расческу» с очень мелкими зубьями.

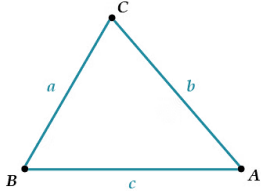
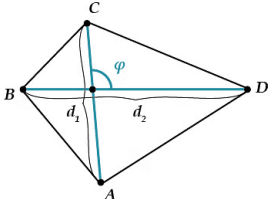
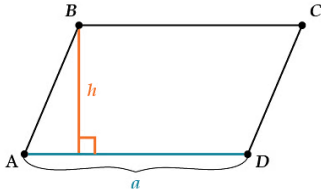
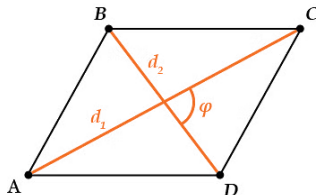
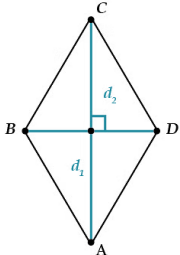
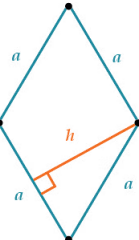
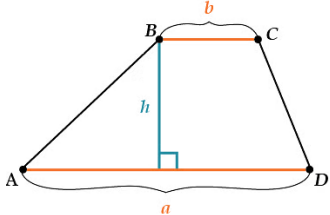
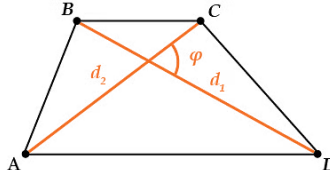
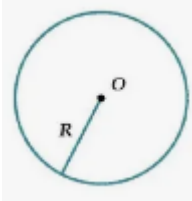
Для рассматриваемых фигур можно интуитивно (то есть для себя) считать, что площадь фигуры – это такое число, сколько в этой фигуре «поместится» квадратных единиц (метров, сантиметров и т.д.)

И представь себе, математики для многих фигур научились выражать площади через какие-то линейные (те, что можно измерить линейкой) элементы фигур. Эти выражения называются «формулы площади».

Формул этих довольно много – математики долго старались. Ты постарайся запомнить сначала самые простые и основные формулы, а потом уже те, что посложнее.

Формулы площади

№	Фигура	Формула	
1	Квадрат	$S=a^2$	
2	Прямоугольник	$S=ab$	
3	Прямоугольный треугольник	$S = \frac{1}{2}ab$ a, b – катеты.	
4	Произвольный треугольник	$S= \frac{1}{2} ah_a$ a – любая сторона, h_a – высота к этой стороне.	
		$S= \frac{1}{2} ab \cdot \sin \alpha$ a, b – любые две стороны, α – угол между ними.	

		Формула Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ a, b, c – стороны, $p = (a+b+c)/2$ – полупериметр	
5	Произвольный четырехугольник	$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \varphi$ $d_1; d_2$ – диагонали φ – угол между ними	
6	Параллелограмм	$S = ah$ a – любая сторона, h_a – высота, опущенная на эту (!) сторону	
		$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \varphi$ $d_1; d_2$ – диагонали, φ – угол между ними.	
7	Ромб	$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$ $d_1; d_2$ – диагонали потому что $\varphi = 90^\circ$, и $\sin 90^\circ = 1$	
		$S = ah$ a – любая сторона, h_a – высота, опущенная на эту (!) сторону	
8	Трапеция	$S = (a+b)/2 \cdot h$ a, b – основания, h – высота	
		$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \varphi$ $d_1; d_2$ – диагонали φ – угол между ними	
9	Круг	$S = \pi R^2$ R – радиус круга	

2. Предмет стереометрии. Основные понятия

Предмет стереометрии

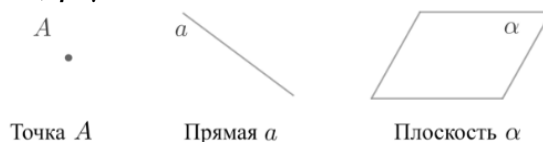
Напомним: геометрия – это наука, которая изучает свойства геометрических фигур. Геометрическая фигура – это любая совокупность точек. Геометрия подразделяется на планиметрию и на стереометрию, которую мы начинаем изучать.

Если в планиметрии мы имели одну плоскость, на которой располагались все рассматриваемые фигуры, то в стереометрии бесконечно много плоскостей. Таким образом, ведение нового геометрического образа (плоскости) влечет за собой необходимость расширить систему аксиом. **Стереометрия** – это раздел геометрии, изучающий пространственные фигуры и их свойства.

Основные понятия стереометрии

Точка, прямая и плоскость – основные (неопределяемые) или, как говорят иначе, простейшие геометрические фигуры в пространстве.

Точки принято обозначать прописными латинскими буквами A, B, C и т.д., прямые – строчными латинскими буквами a, b, c и т.д., плоскости же обозначают строчными буквами греческого алфавита α, β, γ и т.д.

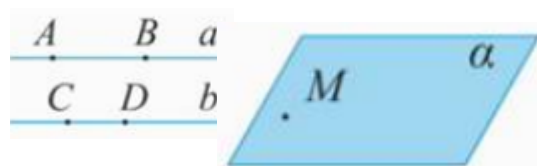


Плоскости принято рисовать либо в виде параллелограмма, либо в виде произвольной замкнутой фигуры. Если все точки геометрической фигуры принадлежат некоторой плоскости, то эту фигуру называют плоской.

Рассмотрим прямую a . На ней лежат точки A и B . Прямая может быть также обозначена как AB . Рассмотрим прямую b , на ней лежат точки C и D . Прямая b может быть также обозначена как CD .

Специфика всей стереометрии заключается в том, что пространственные фигуры мы будем изображать на плоскости.

Так же, как и в планиметрии, важен знак принадлежности, $\in$. Например, точка A принадлежит прямой a : $A \in a$. Точка M принадлежит плоскости α : $M \in \alpha$. А вот прямая a не принадлежит плоскости α : $a \notin \alpha$.



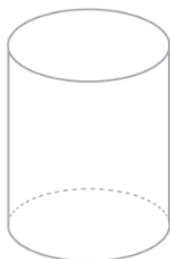
3. Основные пространственные фигуры.

Если не существует плоскости, которой принадлежали бы все точки геометрической фигуры, то эта фигура называется пространственной.

Пространственные геометрические фигуры принято также называть геометрическими телами. Каждое геометрическое тело имеет поверхность, которой оно ограничено (отделено) от всего пространства.



Призма



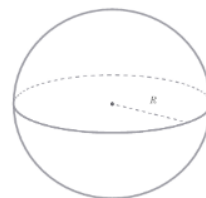
Цилиндр



Пирамида



Конус



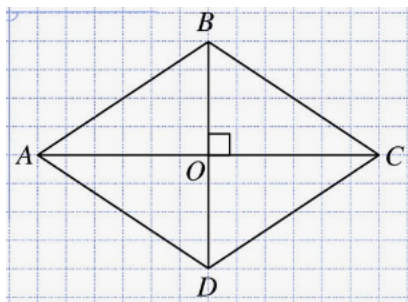
Шар, сфера (поверхность шара)



Параллелепипед

Решение задач

Задача 1. Найдите площадь и периметр ромба, если длины его диагоналей, соответственно, равны 24 см и 10 см.



Дано: ABCD – ромб
диагонали:
BD – 24 см
AC – 10 см

Найти: $S_{ABCD} = ?$
 $P_{ABCD} = ?$

Решение

1. Найдем площадь ромба. Площадь ромба можно найти по формуле, которая использует длины его диагоналей:

$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$ – длины диагоналей ромба. В данном случае $d_1 = 24$ см и $d_2 = 10$ см. Подставим эти значения в формулу: $S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120$ см².

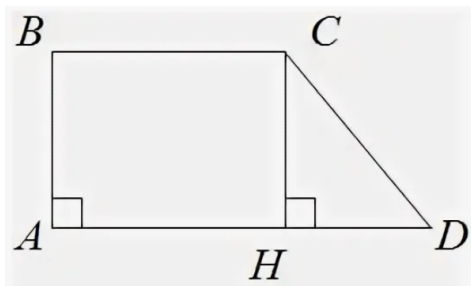
2. Найдем длину стороны ромба. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и делятся пополам. Таким образом, каждая диагональ делится на два равных отрезка. Сторона ромба может быть найдена с помощью теоремы Пифагора в прямоугольном треугольнике, образованном половинами диагоналей и стороной ромба. Половина первой диагонали равна 12 см, а половина второй диагонали равна 5 см. Сторона ромба a будет гипотенузой этого треугольника:

$$a = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ см}$$

3. Найдем периметр ромба. Периметр ромба равен сумме всех его сторон. Так как все стороны ромба равны, периметр будет: $P = 4 \cdot a = 4 \cdot 13 = 52$ см

Ответ: площадь ромба равна 120 см², периметр ромба равен 52 см.

Задача 2. Найдите площадь и периметр прямоугольной трапеции с основаниями 5 см и 9 см, и высотой 3 см.



Дано: ABCD – трапеция
 Угол $BAD = 90^\circ$
 основания:
 $AD = 9$ см; $BC = 5$ см
 Высота: $CH = 3$ см
 Найти: $S_{ABCD} = ?$ $P_{ABCD} = ?$

Решение

1. Найдем площадь трапеции. Площадь трапеции вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

Подставим значения: $S = \frac{1}{2} \cdot (5 + 9) \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 3 = 7 \cdot 3 = 21$ (см²)

2. Найдем периметр трапеции. Периметр трапеции вычисляется по формуле:

$$P = a + b + c + d$$

где a и b – основания, а c и d – боковые стороны. В прямоугольной трапеции одна из боковых сторон является высотой, то есть $c = h = 3$ см. Для нахождения второй боковой стороны d воспользуемся теоремой Пифагора. Вторая боковая сторона d образует прямоугольный треугольник с высотой h и разностью оснований $b - a$:

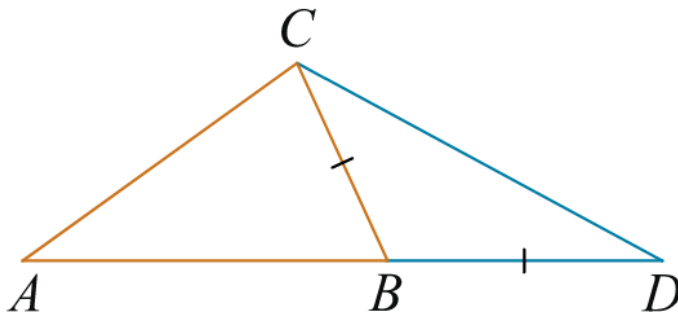
$$d = \sqrt{(b - a)^2 + h^2} = \sqrt{(9 - 5)^2 + 3^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}$$

Теперь подставим все значения в формулу периметра:

$$P = a + b + c + d = 5 + 9 + 3 + 5 = 22 \text{ (см)}$$

Ответ: площадь трапеции 21 см², периметр трапеции 22 см.

Задача 3. В треугольнике ABC угол A равен 44° , угол C равен 62° . На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD, равный стороне BC. Найдите угол D треугольника BCD. Ответ дайте в градусах.



Дано: $\triangle ABC$
 Угол $A = 44^\circ$
 Угол $C = 62^\circ$
 $BC = BD$
 Найти: угол $D = ?$

Решение

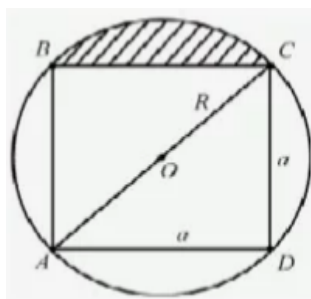
Треугольник CBD – равнобедренный, углы C и D при его основании равны, а их сумма равна внешнему углу при вершине B, то есть углу B треугольника ABC. Сумма углов треугольника ABC равна 180° , поэтому $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 74^\circ$.

$$\angle D = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{180^\circ - 106^\circ}{2} = 37^\circ$$

Следовательно,

Ответ: угол $D = 37^\circ$.

Задача 4. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна 4 см. Вычислите площадь одного из отсекаемых сегментов.



Дано: ABCD – квадрат
 Окр. (т.О, R) – описана около
 ABCD
 AB = 4 см
 Найти: S одного отсеченного
 сегмента

Решение

Через площадь.

$$S_{\text{квадрата}} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ см}^2$$

Диагональ квадрата = диаметр окружности.

$$d \text{ окружности} = \sqrt{(4^2 + 4^2)} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5,7 \text{ см}$$

$$S_{\text{окр}} = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} d\right)^2 = \pi \cdot 8 = 8\pi \text{ см}^2$$

$$8\pi - 16 = 4(2\pi - 4) \text{ см}^2 \text{ площадь 4 сегментов}$$

$$4(2\pi - 4) : 4 = (2\pi - 4) \approx 2,28 \text{ см}^2$$

Ответ: S одного сегмента равна 2,28 см²

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

- 1.1. Что является основными геометрическими фигурами в планиметрии? Дайте определение каждой из них.
- 1.2. Перечислите и охарактеризуйте основные виды треугольников по углам и по сторонам. Приведите примеры каждого вида.
- 1.3. Какие существуют виды четырехугольников? Опишите свойства каждого вида.
- 1.4. Дайте определение окружности и круга. Назовите их основные элементы и объясните их взаимосвязь.
- 1.5. Что такое площадь геометрической фигуры? Как определяется единица измерения площади?

2. Решите предложенные задания (письменно):

Задача 1. Найдите площадь и периметр ромба, если длины его диагоналей, соответственно, равны 16 см и 12 см.

Задача 2. Найдите площадь и периметр прямоугольной трапеции с основаниями 5 см и 17 см, и высотой 5 см.

Задача 3. В треугольнике ABC угол A равен 100°, угол C равен 13°. На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок BD, равный стороне BC. Найдите угол D треугольника BCD. Ответ дайте в градусах.

3. Конспект занятия в тетради

Отчетность

Работы принимаются до 16 ноября 2025 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 10.11.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 10.11.25 (Иванов Иван, ТТГ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

<https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGly>



С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.