

Guía elaborada por el profesor Joel Fariñez

Potenciación en $\mathbb{Z}$

La potenciación como se ya se ha estudiado en cursos anteriores es una forma de expresión abreviada de una multiplicación iterada, es decir, es una expresión que describe un proceso multiplicativo repetido de un mismo número por sí mismo. Recordemos esto con unos ejemplos.

En la multiplicación $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ vemos que el 7 se multiplica seis veces por sí mismo, esto se puede expresar aplicando la potenciación de la siguiente forma: $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$ esto sería la potencia de base 7 elevada al exponente 6

Lo mismo aplica si el número fuera negativo por ejemplo:

$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^4$ aquí vemos que el número -2 se multiplica por sí mismo cuatro veces lo cual queda expresado aplicando la potenciación como la potencia de base -2 elevada al exponente 4.

Ahora bien así como una multiplicación repetida se puede convertir en una potencia, una potencia se puede expresar como una multiplicación repetida y calcularse su valor, veamos unos ejemplos de esto.

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$ en este último ejemplo obsérvese que al multiplicarse los signos el resultado final es positivo, esto nos lleva a recordar las propiedades de la potenciación que se explican a continuación.

Propiedades la potenciación

a.) $a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{Z} / a \neq 0$ esta propiedad se lee como así: todo número elevado a la uno da cero, esto se cumple para todo entero a tal que dicho entero sea distinto de cero, es decir, no existe 0^0 puesto que esto es una indeterminación, vemos unos ejemplos

$$(-55)^0 = 1 ; 4500^0 = 1 ; (-186)^0 = 1$$

b.) $a^1 = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$ esta propiedad se lee así: todo número elevado a la uno da como resultado el mismo número, y esto es válido para todo entero, veamos unos ejemplos.

$$(-15)^1 = -15 ; \quad 40^1 = 40 ; \quad (-7)^1 = -7$$

c.) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ esta propiedad se lee así: multiplicación de potencias igual base se coloca la misma base y se suma los exponentes, por ejemplo:

$$(-7)^{14} \cdot (-7)^{15} = (-7)^{14+15} = (-7)^{29}$$

$4^{16} \cdot 4 \cdot 4^{13} = 4^{16+1+13} = 4^{30}$ en este ejemplo se observa que el 4 que no tiene exponente visible en realidad si lo tiene y se sobreentiende que es 1, es decir, $4^1 = 4$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

d.) a^n esta propiedad se lee así: división de potencias de igual base se coloca la misma base y se restan los exponentes, por ejemplo:

$$\frac{4^{17}}{4^{11}} = 4^{17-11} = 4^6$$

$$\frac{(-5)^{28}}{(-5)^{13}} = (-5)^{28-13} = (-5)^{15}$$

e.) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ esta propiedad se conoce como potencia de una potencia y dice que en ese caso se coloca la misma base y se multiplican los exponentes, por ejemplo

$$((-3)^4)^5 = (-3)^{4 \cdot 5} = (-3)^{20}$$

$$(9^6)^7 = 9^{6 \cdot 7} = 9^{42}$$

f.) $(a^n \cdot b^m)^k = a^{n \cdot k} \cdot b^{m \cdot k}$ esta propiedad se conoce como potencia de un producto y establece que en ese caso se debe multiplicar el exponente externo es decir k por los exponentes internos, veamos unos ejemplos:

$$(7^5 \cdot (-2)^3)^4 = 7^{5 \cdot 4} \cdot (-2)^{3 \cdot 4} = 7^{20} \cdot (-2)^{12}$$

$$((-5)^4 \cdot (-9)^7)^6 = (-5)^{4 \cdot 6} \cdot (-9)^{7 \cdot 6} = (-5)^{24} \cdot (-9)^{42}$$

veamos a continuación un ejercicio en donde se apliquen estas propiedades

$$\left[\frac{[(-2)^4 \cdot 5^3 \cdot ((-2)^2)^3 \cdot (5^2)^4 \cdot (-2)^6]^5}{[(-2)^2 \cdot (5^2)^3 \cdot ((-2)^3)^3 \cdot 5^7]^3} \right]^2$$

para resolver este ejercicio primero debemos resolver la potencias de potencias que este caso son: $((-2)^2)^3 = (-2)^6$; $(5^2)^4 = 5^8$; $(5^2)^3 = 5^6$; $((-2)^3)^3 = (-2)^9$ recuerden que aquí se multiplican los exponentes por eso tenemos esos resultados que lo sustituimos en la expresión anterior

$$\left[\frac{[(-2)^4 \cdot 5^3 \cdot (-2)^6 \cdot 5^8 \cdot (-2)^6]^5}{[(-2)^2 \cdot 5^6 \cdot (-2)^9 \cdot 5^7]^3} \right]^2$$

ahora vamos a multiplicar el 5 externo al corchete por los exponentes de adentro y los mismo hacemos con el 3

$$\left[\frac{(-2)^{4 \cdot 5} \cdot 5^{3 \cdot 5} \cdot (-2)^{6 \cdot 5} \cdot 5^{8 \cdot 5} \cdot (-2)^{6 \cdot 5}}{(-2)^{2 \cdot 3} \cdot 5^{6 \cdot 3} \cdot (-2)^{9 \cdot 3} \cdot 5^{7 \cdot 3}} \right]^2$$

$$\left[\frac{(-2)^{20} \cdot 5^{15} \cdot (-2)^{30} \cdot 5^{40} \cdot (-2)^{30}}{(-2)^6 \cdot 5^{18} \cdot (-2)^{27} \cdot 5^{21}} \right]^2$$

ahora tanto arriba como abajo aplicamos al regla de multiplicación de potencias de igual base que dice que se coloca la misma base y se suman los exponentes

$$\left[\frac{(-2)^{20+30+30} \cdot 5^{15+40}}{(-2)^{6+27} \cdot 5^{18+21}} \right]^2$$

$\left[\frac{(-2)^{80} \cdot 5^{55}}{(-2)^{33} \cdot 5^{39}} \right]^2$ ahora aplicamos lo de la división de potencias de igual base la cual dice que se coloca la misma base y restan los exponentes

$$\left[(-2)^{80-33} \cdot 5^{55-39} \right]^2$$

$\left[(-2)^{47} \cdot 5^{16} \right]^2$ por último multiplicamos el 2 externo al corchete por los exponentes internos

$$(-2)^{47 \cdot 2} \cdot 5^{16 \cdot 2} = (-2)^{94} \cdot 5^{32} \text{ así concluye este ejercicio}$$

Ecuaciones en Z

Las ecuaciones en Z se estudiaron el curso de primer año, por lo tanto aquí desarrollaremos un breve repaso de cómo resolver dichas ecuaciones partiendo de un ejemplo sencillo

$$\frac{7(4x+8)}{2} = \frac{6(2x+4)}{3} \quad \text{primero empezamos multiplicando los números de los paréntesis}$$

$$\frac{(7 \cdot 4x + 7 \cdot 8)}{2} = \frac{(6 \cdot 2x + 6 \cdot 4)}{3}$$

$$\frac{(28x + 56)}{2} = \frac{(12x + 24)}{3} \quad \text{luego pasamos el 3 a multiplicar del lado izquierdo de la ecuación y el 2 del lado derecho}$$

$$3 \cdot (28x + 56) = 2 \cdot (12x + 24)$$

$84x + 168 = 24x + 48$ luego agrupamos x con x y números con números teniendo cuidado de cambiar los signos

$$84x - 24x = 48 - 168 \quad \text{operando en ambos miembros}$$

$$60x = -120 \quad \text{luego pasamos el 60 del otro lado dividiendo}$$

$$x = -\frac{120}{60} = -2 \quad \text{y así concluye la resolución de la ecuación.}$$

Ejercicios propuestos

a.) Expresar las siguientes multiplicaciones como potencias

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) =$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$$

b.) Desarrollar las siguientes potencias

$$7^4 =$$

$$(-4)^6 =$$

c.) Simplificar las siguientes expresiones

$$\left[\frac{[(-7)^4 \cdot 2^3 \cdot ((-7)^2)^3 \cdot (2^2)^4 \cdot (-7)^6]^6}{[(-7)^2 \cdot (2^2)^3 \cdot ((-7)^3)^3 \cdot 2^7]^2} \right]^3$$

$$\left[\frac{[(-3)^4 \cdot 5^5 \cdot ((-3)^2)^3 \cdot (5^3)^4 \cdot (-3)^7]^6}{[(-3)^2 \cdot (5^2)^3 \cdot ((-3)^3)^3 \cdot 5^7]^3} \right]^4$$

d.) Resolver las siguientes ecuaciones

$$\frac{3 \cdot (4x - 12)}{2} = 8x - 10$$

$$\frac{4 \cdot (5x - 8)}{3} = 6x - 4$$