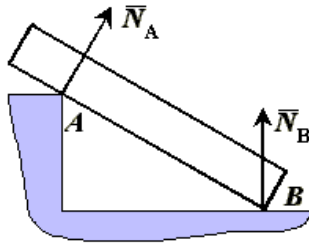


Лекція 3

Короткий зміст: З'єднання тіл між собою і напрям сил реакції зв'язків. Системи сил, що сходяться. Умови рівноваги системи сил, що сходяться. Момент сили відносно точки. Момент сили відносно осі.

З'єднання тіл між собою

Окреме тіло може бути пов'язане з іншими тілами різними способами.



Тіла, що контактують з поверхнею

Якщо контактують абсолютно гладкі тіла, то сили взаємодії між ними направлені по загальній нормалі до їх поверхонь в точці зіткнення.

Рисунок 3-1

Зв'язок за допомогою ниток (нитка, ланцюг, трос)

Зв'язок, здійснюваний у вигляді гнучкої нерозтяжної і невагомої нитки, не дає віддалятися тілу від точки підвісу уздовж нитки. Тому реакція натягнутої нитки також направлена уздовж нитки, до точки її підвісу.

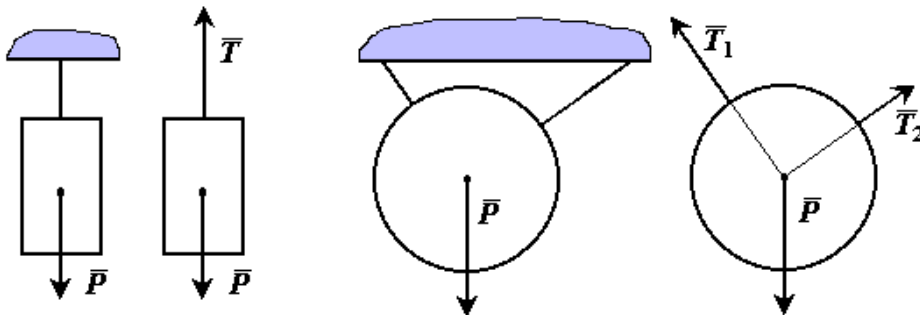
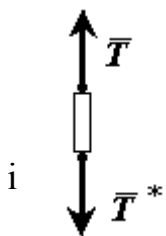


Рисунок 3-2

Звільнимо гирю від зв'язку (розрізаємо нитку в будь-якому місці) і додавши силу реакції зв'язку, який направимо уздовж нитки вгору (позначимо її T).

Гиря стає вільним твердим тілом, на яке діють дві сили і при цьому воно знаходиться у спокої. Згідно аксіомі про рівновагу двох сил, сили P і T рівні за величиною і протилежні за напрямом.



Вирижемо частину нитки в будь-якому місці і додамо в місцях розрізу сили реакції зв'язку (позначимо їх T і T^*). Тіло під дією двох сил знаходиться в рівновазі. Згідно аксіомі про рівновагу двох сил, сили T і T^* рівні за величиною і діють уздовж однієї прямої в протилежні сторони. Реакція зв'язку натягнутої нитки направлена уздовж нитки.

З'єднання тіл за допомогою шарнірів

Шарніром називається пристрій, що зв'язує тіла і що дозволяє здійснювати обертання одного тіла відносно іншого.

Циліндровий шарнір допускає обертання тіл навколо однієї осі (і ковзання уздовж неї).

Шарнірно-нерухома опора перешкоджає будь-якій поступальній ході, але дає можливість вільно обертатися навколо осі шарніра.

Реакція $\bar{R}$ шарнірно-нерухомої опори проходить через центр шарніра A і лежить в площині перпендикулярною до осі шарніра, але її модуль і напрям невідомі.

Умовні позначення:

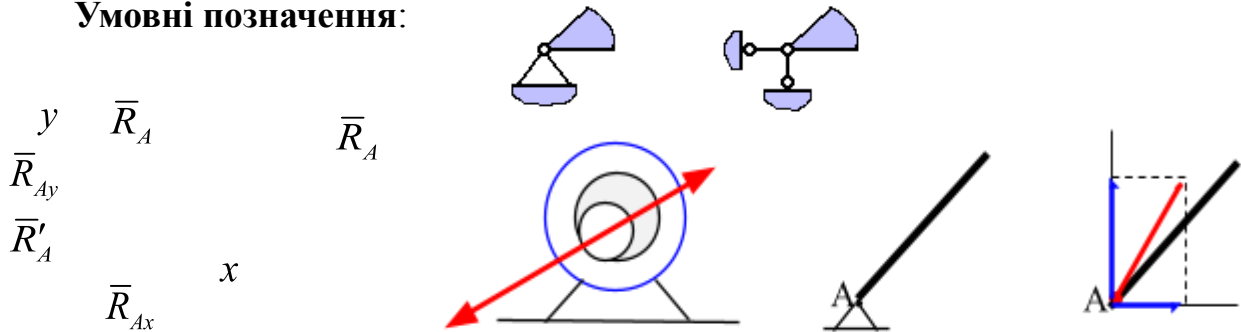


Рисунок 3-3

Шарнірно-рухома опора (шарнірно-нерухома опора поставлена на катки) не перешкоджає переміщенню паралельно опорній поверхні. Якщо не враховувати тертя катків, то лінія дії реакції такої опори проходить через центр шарніра перпендикулярно опорній поверхні. Невідомий тільки модуль цієї реакції.

Умовні позначення:



Рисунок 3-4

Кульовий шарнір. Кульовим шарніром називається пристрій, що дозволяє тілам, які мають загальну точку з'єднання, здійснювати обертання в просторі відносно один одного навколо загальної точки. Кульовий шарнір складається з сферичної чаші, що знаходиться на одному тілі, і сферичного виступу того ж діаметру на іншому. Реакція в кульовому шарнірі може мати будь-який напрям в просторі.

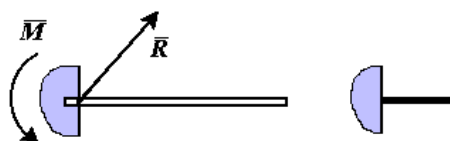
Жорстке затиснення

У разі затиснення одного тіла в інше реакція зв'язку складається з сили $\bar{R}$ і пари сил з моментом $\bar{M}$. Величина і напрям реакції визначається із загальних рівнянь рівноваги твердого тіла.

Рисунок 3-5

Приклад 2-1.

діє горизонтальна реакції $\bar{R}_A$ (реакції зв'язку в точці A).



На невагому трьохшарнірну арку сила F . Визначити лінію дії

Рішення: Розглянемо праву частину арки окремо. У точках В і С прикладемо сили реакції зв'язків $\bar{R}_B$ і $\bar{R}_C$. Тіло під дією двох сил знаходиться в рівновазі. Згідно аксіомі про рівновагу двох сил, сили $\bar{R}_B$ і $\bar{R}_C$ однакові по величині і діють уздовж однієї прямої в протилежні сторони. Таким чином напрям сили $\bar{R}_C$ нам відомий (уздовж лінії ВС).

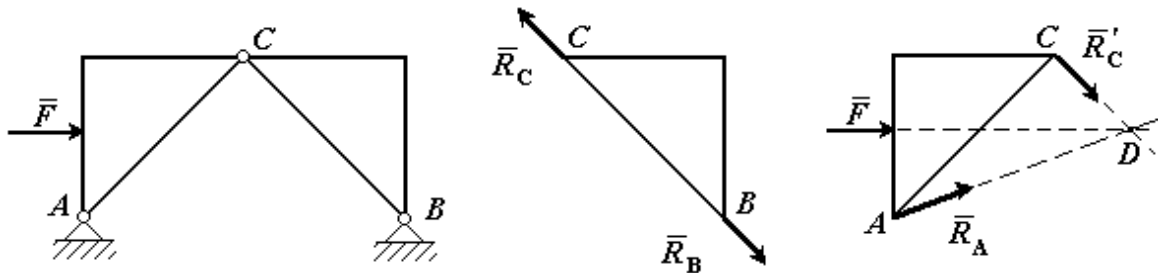
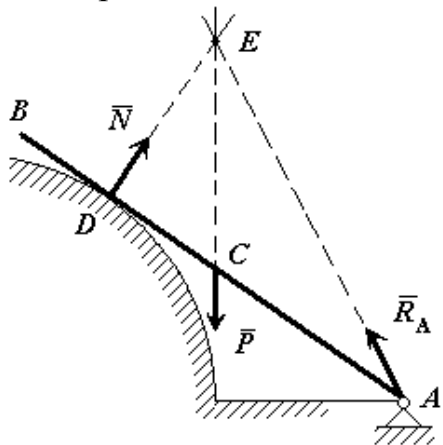


Рисунок 3-6

Розглянемо ліву частину арки окремо. У точках А і С прикладемо сили реакції зв'язків $\bar{R}_B$ і $\bar{R}'_C$. Сила $\bar{R}'_C = -\bar{R}_C$, дія дорівнює протидії. На тіло діють три сили, напрями двох сил (F і $\bar{R}'_C$) відомі. Згідно теореми про три сили лінії дії всіх трьох сил перетинаються в одній точці. Отже, сила $\bar{R}_A$ направлена уздовж лінії AD.



Приклад 2-2. Однорідний стержень закріплений шарнірно в точці А і спирається на гладкий циліндр. Визначити лінію дії реакції $\bar{R}_A$ (реакції зв'язку в точці А).

Рішення: Оскільки стержень однорідний, то рівнодіюча сил тяжіння (сила P), що діють на стержень, прикладена в його геометричному центрі (точка С). Оскільки стержень спирається на гладку поверхню, то реакція зв'язку (сила N) в точці дотику

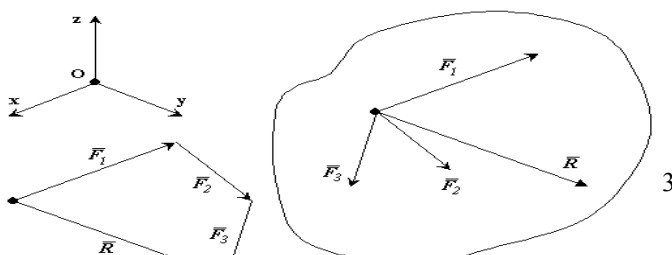
(точка D) направлена по нормалі Рисунок 3-7

до цієї поверхні. На тіло діють три сили, напрями двох сил (N і P) відомі. Згідно теореми про три сили лінії дії всіх трьох сил перетинаються в одній точці. Отже, сила $\bar{R}_A$ направлена уздовж лінії АЕ.

Система сил, що сходиться

Системою сил, що сходиться, називається така система сил, лінії дії якої перетинаються в одній точці.

Рівнодіюча системи сил, що сходиться, дорівнює векторній сумі складових сил і визначається замикаючою стороною силового багатокутника, побудованого на силах як на складових. Точка додатку рівнодіючої сили співпадає з точкою перетину ліній дії



$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_3 = \sum_i \bar{F}_i$$

сил

Проекції рівнодіючої сили на осі координат дорівнюють алгебраїчній сумі проекцій сил, що становлять на ці осі. Рисунок 3-8

Умови рівноваги системи сил, що сходяться у векторній формі

Для рівноваги системи сил, прикладених до твердого тіла, що сходиться необхідно і достатньо, щоб рівнодіюча сила дорівнювала нулю.

$$\bar{R} = 0$$

Умови рівноваги системи сил, що сходяться в алгебраїчній формі

Для рівноваги просторової системи сил, що сходяться, прикладених до твердого тіла, необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил на кожну з трьох прямокутних осей координат дорівнювали нулю

$$\sum F_{xi} = 0 \quad \sum F_{yi} = 0 \quad \sum F_{zi} = 0$$

Момент сили відносно точки

Якщо під дією прикладеної сили тверде тіло може здійснювати обертання навколо деякої точки, то для того, щоб охарактеризувати обертальний ефект сили, необхідно ввести нове поняття - момент сили відносно точки.

Розглянемо силу $\bar{F}$, прикладену до тіла в точці А. З деякої точки О опустимо перпендикуляр на лінію дії сили $\bar{F}$.

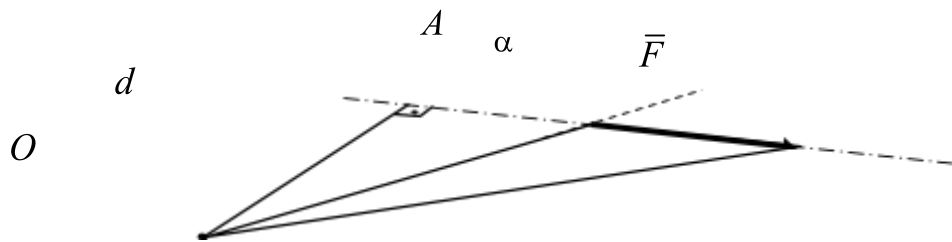
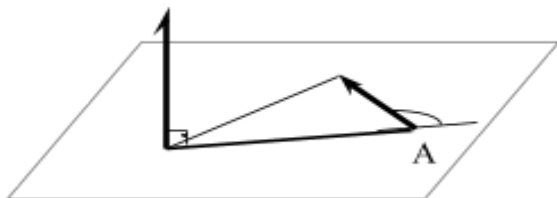


Рисунок 3-9

Плечем d сили $\bar{F}$ відносно точки О називається найкоротша відстань між цією точкою і лінією дії сили.

Через силу $\bar{F}$ і точку О можна провести площину. Сила $\bar{F}$ намагається обертати тіло навколо осі, яка проходить через точку О і яка перпендикулярна площині, в якій лежить сила. Точка О називається моментною точкою.



Моментом сили $\bar{F}$ відносно точки О називається вектор $\bar{M}_0(\bar{F})$, прикладений в цій

точці і рівний векторному добутку радіус-вектора, що сполучає цю точку з точкою додатку сили на вектор сили $\bar{F}$.

Рисунок 3-10

$$\bar{M}_0(F) = \bar{r} \times F$$

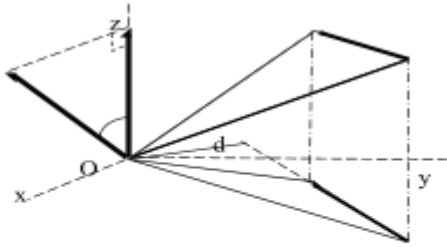
Модуль вектора $M_0(\vec{F})$ дорівнює добутку модуля сили F на її плече h .

$$M_0(\vec{F}) = F \cdot r \cdot \sin(\alpha) = F \cdot d$$

Момент сили $\vec{F}$ відносно точки О направлений перпендикулярно площині, в якій лежать сила і моментна точка (радіус-вектор), в тому напрямі звідки видно прагнення сили обертати тіло проти руху годинникової стрілки.

1. Момент сили відносно точки не міняється від перенесення сили уздовж лінії її дії.

2. Момент сили дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через момент ну точку.



Якщо сила $\vec{F}$ задана своїми проекціями F_x F_y F_z на осі координат і задані координати x y z точки додатку цієї сили, то момент сили відносно початку координат обчислюється таким чином:

Рисунок 3-11

$$\begin{aligned} \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ F_z & F_x \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \cdot \vec{i} + (z \cdot F_x - x \cdot F_z) \cdot \vec{j} + (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

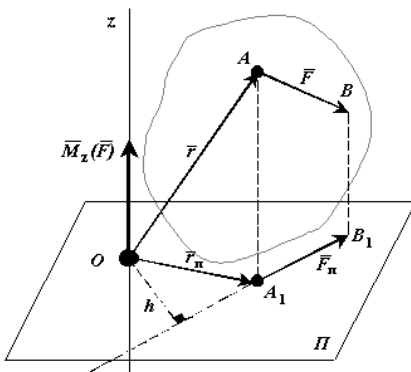
Проекції моменту на осі координат дорівнюють:

$$M_{0x}(\vec{F}) = (y \cdot F_z - z \cdot F_y)$$

$$M_{0y}(\vec{F}) = (z \cdot F_x - x \cdot F_z)$$

$$M_{0z}(\vec{F}) = (x \cdot F_y - y \cdot F_x)$$

Момент сили відносно осі



До твердого тіла в точці А прикладена сила $\vec{F}$. Проведемо в просторі вісь (наприклад z). На осі z довільно виберемо точку О. З'єднаємо точку О з точкою А радіус-вектором. Через точку О проведемо площину П перпендикулярну осі z . Спроектуємо вектора $\vec{F}$ і $\vec{r}$ на площину П.

Моментом сили $\vec{F}$ відносно осі називається вектор, який дорівнює моменту проекції сили $\vec{F}$ на площину Π відносно точки O перетину осі z з площиною Π .

$$\vec{M}_z(\vec{F}) = \vec{M}_0(\vec{F}_\Pi) = \vec{r}_\Pi \times \vec{F}_\Pi$$

$$M_z(\vec{F}) = F_\Pi \cdot r_\Pi \cdot \sin(\vec{r}_\Pi, \vec{F}_\Pi) = F_\Pi \cdot h$$

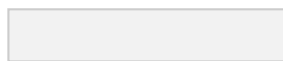
Рисунок 3-12

Властивості моменту сили відносно осі:

1. Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила паралельна осі. В цьому випадку дорівнює нулю проекція сили на площину, перпендикулярну осі.
2. Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо лінія дії сили перетинається з віссю. В цьому випадку дорівнює нулю плече сили.

Зв'язок моменту сили відносно осі з моментом сили відносно точки

Проведемо через точку O , де заданий момент сили відносно точки $\vec{M}_0(\vec{F})$ декартові осі координат x, y, z . Момент сили відносно точки можна представити у вигляді суми трьох векторів $\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{M}_x(\vec{F}) + \vec{M}_y(\vec{F}) + \vec{M}_z(\vec{F})$. Ці вектори є моментами сили відносно осей x, y, z відповідно.



$$\vec{M}_y(\vec{F}) = M_{0y}(\vec{F}) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{M}_z(\vec{F}) = M_{0z}(\vec{F}) \cdot \vec{k}$$

Момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки на осі.

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cdot \cos(\angle Oz, \vec{M}_0(\vec{F}))$$

Формули для моментів сили відносно осей координат

Якщо сила $\vec{F}$ задана своїми проекціями F_x, F_y, F_z на осі координат і задані координати x, y, z точки додатку цієї сили відносно осей координат, то моменти сили відносно осей координат обчислюються таким чином:

$$M_x(\vec{F}) = M_{0x}(\vec{F}) = (y \cdot F_z - z \cdot F_y)$$

$$M_y(\vec{F}) = M_{0y}(\vec{F}) = (z \cdot F_x - x \cdot F_z)$$

$$M_z(\vec{F}) = M_{0z}(\vec{F}) = (x \cdot F_y - y \cdot F_x)$$