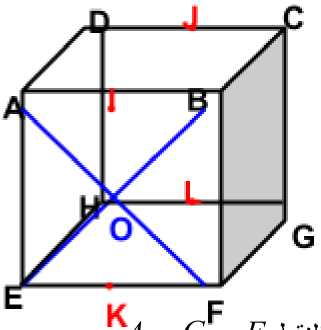
أعمال موجهة :



$ABCDEFGH$ مكعب ، I منتصف الحرف $[AB]$ ، J منتصف الحرف $[DC]$ ،
K منتصف الحرف $[EF]$ ، L منتصف الحرف $[GH]$.
O نقطة تقاطع المستقيمين (AF) و (BE) .

1) النقط والمستويات :

1. النقطتان I و H تنتميان إلى المستوي الذي يشمل النقط A ، B و E ؟
2. النقطتان O و D تنتميان إلى المستوي الذي يشمل النقط F ، G و A ؟

2) تقاطع مستويين :

1) (P) هو المستوي الذي يشمل النقط A ، B ، F ، E ؛ و (Π) المستوي الذي يشمل النقط F ، G و A .
هل المستويين (P) و (Π) يتقاطعان ؟

2) هل المستوي (P) يقطع المستوي الذي يشمل النقط C ، D ، G ، H ؟

3) أرسم على المكعب السابق تقاطع المستوي (P') الذي يشمل النقط A ، C ، F مع المستوي (P) ؛ ثم مع المستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C ، D ؛ ثم مع المستوي الذي يشمل B ، F ، G ، C .

4) هل المستوي (P') يقطع المستوي الذي يشمل النقط A ، E ، H ، D ؟

3) تقاطع مستقيم ومستو

1) هل المستقيمين (IJ) و (CG) يقطعان المستوي (P) ؟

2) المستقيم (JO) يقطع المستوي الذي يشمل النقط E ، F ، G ، H ؟

4) تقاطع مستقيمين :

1) هل المستقيمين (AF) و (JO) متقاطعان ؟

2) هل المستقيمين (KL) و (JO) متقاطعان ؟

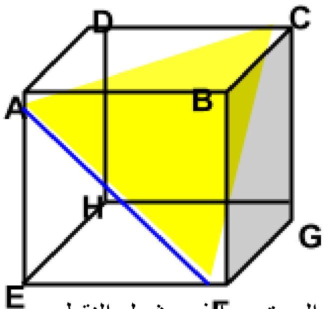
3) هل المستقيمين (AF) و (BG) متقاطعان ؟

الحل :

1) أ) I هي نقطة من المستقيم (AB) إذن هي نقطة من كل مستو يشمل المستقيم (AB) وبالتالي I تنتمي إلى المستوي الذي يشمل النقط A ، B و E . النقطة H لا تنتمي إلى المستوي الواجهة (ABE) .

ب) المستوي (AGF) يشمل المستقيم (AF) و O نقطة من (AF) إذن O تنتمي إلى المستوي (AGF) .

لدينا المستقيمان (AD) و (FG) متوازيان تماما وبالتالي يوجد مستو واحد يشملهما وهو (AGF) إذن D تنتمي إليه .



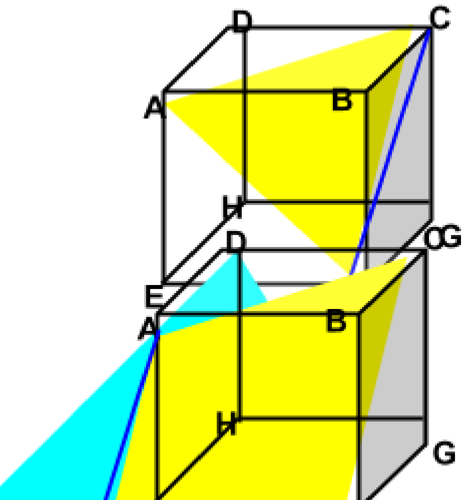
2) أ) المستويان (P) و (Π) يتقاطعان في المستقيم (AF) .

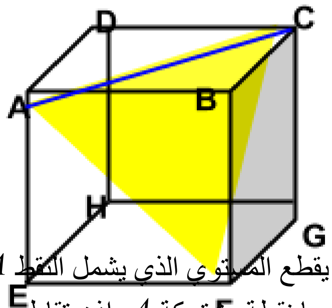
ب) المستوي (P) والمستوي الذي يشمل النقط C ، D ، G ، H منفصلان
لا توجد أي نقطة مشتركة بينهما .

ج) رسم تقاطع المستوي (P') الذي يشمل النقط A ، C ، F مع المستوي (P) ،
وهو المستقيم (AF) .

رسم تقاطع (P') مع المستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C ، D وهو المستقيم (AC) .

رسم تقاطع (P') مع المستوي الذي يشمل النقط B ، F ، G ، C وهو المستقيم (CF)





د) المستوي (P') يقطع المستوي الذي يشمل النقط A ، E ، H ، D
لأنهما متمايزان ولهما نقطة مشتركة A إذن تقاطعهما يكون مستقيم

يشمل A وهو المستقيم (AT)

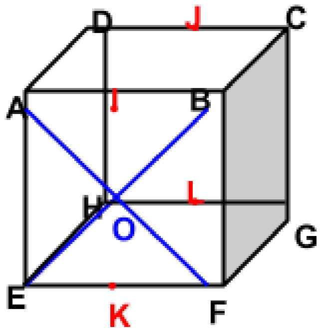
3) أ) المستقيم (IJ) يقطع المستوي (P) في نقطة واحدة وهي I
بينما (CG) لا يقطع المستوي (P) هما متوازيان

ب) (JO) لا يقطع المستوي الذي يشمل النقط E ، F ، G ، H بل هما متوازيان .

4) أ) المستقيمان (AF) و (JO) يتقاطعان في النقطة O .

ب) المستقيمان (KL) و (JO) متقاطعان في نقطة .

ج) المستقيمان (AF) و (BG) غير متقاطعان .



قواعد أساسية في الهندسة الفضائية :

بديهية 1 : إذا كانت A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية فإنه يوجد مستو واحد يشملها .

بديهية 2 : إذا كانت A و B نقطتين متمايزتين من مستو (P) فإن كل نقط المستقيم (AB) تنتمي إلى المستوي (P) .

بديهية 3 : إذا كان مستويان متمايزان ولهما نقطة مشتركة فإن تقاطعهما هو مستقيم .

نتائج : يتعين المستوي بـ :

ثلاث نقط ليست في استقامية ؛ مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه ؛ مستقيمين متوازيان تماما ؛ مستقيمين متقاطعان في نقطة واحدة .

ملاحظة : كل خواص ونتائج الهندسة المستوية تبقى صحيحة في أي مستو من الفضاء .

تمرين 1 :

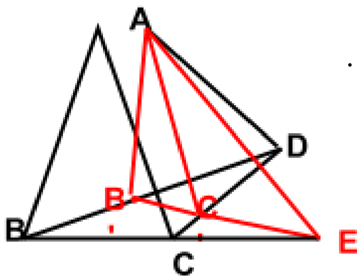
$ABCD$ رباعي وجوه . B' و C' نقطتان من المستقيمين (DB) و (DC) على الترتيب .

نفترض أن المستقيمين (BC) و $(B'C')$ يتقاطعان في النقطة E .

برهن أن المستقيم (AE) هو تقاطع المستويين (ABC) و $(AB'C')$.

الحل :

الطريقة : يكفي إثبات أن المستويين يشملان نقطتين متمايزتين .



المستويان (ABC) و $(AB'C')$ متمايزان ولهما نقطة مشتركة A ، إذن تقاطعهما هو مستقيم يشمل A .

E هي نقط من (BC) إذن هي نقطة من المستوي (ABC) ، وكذلك هي نقطة من $(B'C')$

إذن هي نقطة من المستوي $(AB'C')$ وبالتالي E هي نقطة مشتركة للمستويين (ABC) و $(AB'C')$.

E هي نقط من المستوي (BCD) ولكن A خارج هذا المستوي إذن A و E نقطتان متمايزتان

A و E نقطتان متمايزتان تنتميان إلى المستويين (ABC) و $(AB'C')$ إذن تقاطعهما هو المستقيم (AE) .

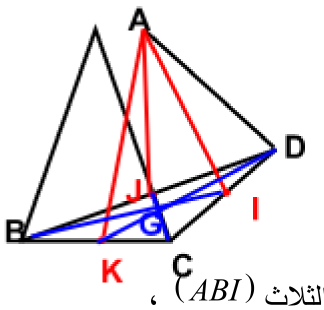
تمرين 2 :

$ABCD$ رباعي وجوه . النقط I ، J ، K منتصفات الأحرف $[CD]$ ، $[DB]$ و $[BC]$ على الترتيب.

برهن أن المستويات (ABI) ، (ACJ) و (ADK) لها مستقيم مشترك .

الحل :

الطريقة : يكفي إثبات أن نقطتين مختلفتين تنتميان إلى المستويات الثلاث .



النقطة A تنتمي إلى المستويات الثلاث (ABI) ، (ACJ) و (ADK) .

في المستوي (BCD) متوسطات المثلث BCD تتقاطع في نقطة وحيدة G (مركز ثقله)

وبالتالي النقطة G تنتمي إلى المستقيمات (BI) ، (CJ) ، (DK) ومنه النقطة G

تنتمي إلى المستويات (ABI) ، (ACJ) و (ADK) .

النقطة A هي خارج المستوي (BCD) وبالتالي : النقطتان A و G متمايزتان وتنتميان إلى المستويات الثلاث (ABI) ، (ACJ) و (ADK) . إذن تقاطع هذه المستويات هو المستقيم (AG) .

تمرين 3 :

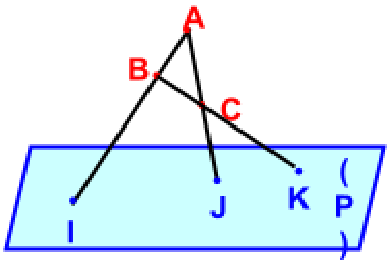
(P) مستو ؛ A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية ولا تنتمي إلى المستوي (P) .

نفترض أن المستقيمات (AB) ، (AC) و (BC) تقطع المستوي (P) في النقط I ، J ، K على الترتيب .

بين أن النقط I ، J ، K في استقامية .

الحل :

الطريقة : إذا كانت هذه النقط تنتمي إلى مستوين متمايزين فهي تنتمي إلى تقاطعهما الذي هو مستقيم وبالتالي يكفي تبيان أن النقط I ، J ، K تنتمي إلى مستوين متمايزين .



النقط A ، B ، C ليست في استقامية إذن تعين مستو نسميه (ABC) .

النقط I ، J ، K تنتمي إلى المستوي (P) . وكذلك هذه النقط تنتمي إلى المستقيمات (AB) ، (AC) و (BC) التي هي في المستوي (ABC)

ومنه النقط I ، J ، K تنتمي إلى المستوي (ABC)

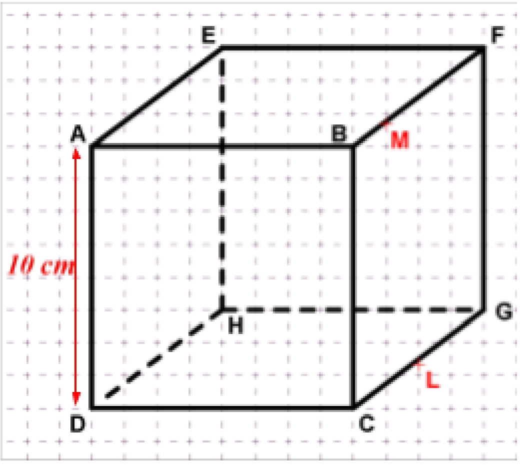
وبالتالي النقط I ، J ، K تنتمي إلى المستويين المتمايزين (P) و (ABC) .

إذن النقط I ، J ، K تنتمي إلى تقاطع المستويين (P) و (ABC) الذي هو مستقيم .

وبالتالي النقط I ، J ، K في استقامية .

الأوضاع النسبية للمستويات والمستقيمات في الفضاء :

نشاط 5 :



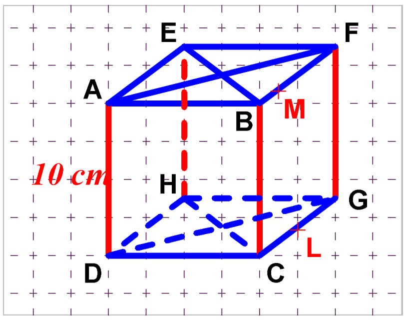
الشكل المقابل هو لمكعب طول حرفه $10\,cm$ مرسوم بمنظور متساوي القياس ،

النقطتان M و L هما تقاطع $[BF]$ و $[CG]$ مع مستقيمات رصف الورقة .

باستعمال بيانات الشكل أجب عن الأسئلة الآتية :

1. أذكر المستقيمات التي كل منها عمودي على (FG) .
2. أذكر المستقيمات التي كل منها يوازي (FG) .
3. أذكر مستقيمين غير متقاطعين وغير متوازيين .
4. هل المستقيمين (EB) و (HB) متعامدان ؟
5. ما نوع الرباعي $EBCH$ ؟
6. عين القيسين BM و CL وأحسب ML .

حل النشاط :



1. المستقيمات العمودية على (FG) هي : (AB) ، (AE) ، (FA) ، (FB) ، (FE) ، (EB) ، (GH) ، (GD) ، (GC) ، (HC) ، (DH) ، (DC) .
2. المستقيمات الموازية للمستقيم (FG) هي : (BC) ، (AD) ، (EH) .

نشاط 6 :

باستعمال الشكل الوارد في النشاط السابق أجب عن الأسئلة الآتية :

1. ما هو وضع المستقيم (AB) والمستوي $(BCGF)$ ؟
2. ما هو وضع المستقيم (EB) والمستوي $(AFGD)$ ؟
3. ما هو وضع المستقيم (EH) والمستوي $(AFGD)$ ؟
4. ما هو وضع المستقيم (HB) والمستوي $(AFGD)$ ؟

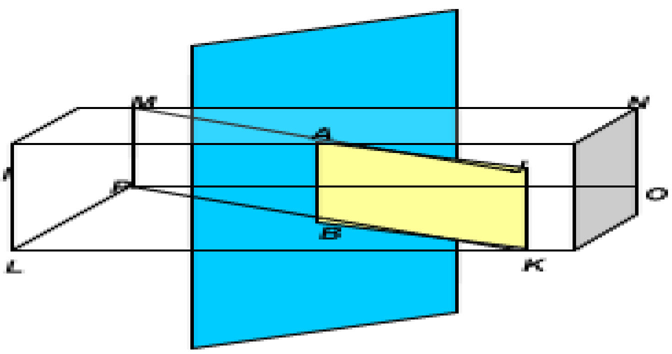
حل النشاط :

نشاط 7 :

الشكل $LKOPIJNM$ هو تمثيل لمتوازي مستطيلات بالمنظور متساوي القياس .

لاحظ وأجب عن الأسئلة الآتية :

1. أذكر مستويين متوازيين ؟
2. أذكر مستويين متعامدين ؟



3. ما هو الوضع النسبي للمستويين $(NOLI)$ و $(MJKP)$ ؟

الحل :

1. $(IMNJ)$ و $(LKOP)$ مستويان متوازيان . $(IJKL)$ و $(MNOP)$ مستويان متوازيان .
$(JKON)$ و $(IMPL)$ مستويان متوازيان .

2. $(IMNJ)$ و $(JKON)$ مستويان متعامدان . $(IMNJ)$ و $(IMPL)$ مستويان متعامدان .
$(IMNJ)$ و $(IJKL)$ مستويان متعامدان . $(IMNJ)$ و $(MNOP)$ مستويان متعامدان .
$(IMNJ)$ و $(MJKP)$ مستويان متعامدان . $(IMNJ)$ و $(NOLI)$ مستويان متعامدان .
$(LKOP)$ و $(JKON)$ مستويان متعامدان . $(LKOP)$ و $(IMPL)$ مستويان متعامدان .
$(LKOP)$ و $(IJKL)$ مستويان متعامدان . $(LKOP)$ و $(MNOP)$ مستويان متعامدان .
$(LKOP)$ و $(MJKP)$ مستويان متعامدان . $(LKOP)$ و $(NOLI)$ مستويان متعامدان .

3. المستويان $(NOLI)$ و $(MJKP)$ متقاطعان وتقاطعهما هو المستقيم (AB) .

الأوضاع النسبية لمستويين :

- كل مستويين من الفضاء هما إما متطابقان وإما متمايزان .
- كل مستويين متمايزين هما إمّا متوازيان تماما لا توجد أي نقطة مشتركة بينهما وإمّا متقاطعان وتقاطعهما هو مستقيم .
- نقول عن مستويين أنهما متوازيان إذا كان متطابقان أو متوازيان تماما .

الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو :

- كل مستقيم ومستو من الفضاء هما إما متوازيان تماما (لا توجد أي نقطة مشتركة بينهما) وإما متقاطعان .
- مستقيم ومستو متوازيان ومتقاطعان معناه أن كل نقط المستقيم موجودة في المستوي (المستوي يحوي المستقيم)
- مستقيم ومستو غير متوازيين ومتقاطعان معناه أن تقاطعهما نقطة وحيدة .

الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء :

- كل مستقيمين من الفضاء هما إما من نفس المستوي وإما ليس من مستو واحد .
- المستقيمان من نفس المستوي معناه أنهما إما متوازيان وإما متقاطعان .
- مستقيمان متوازيان معناه أنهما متطابقان أو من نفس المستوي وغير متقاطعين .

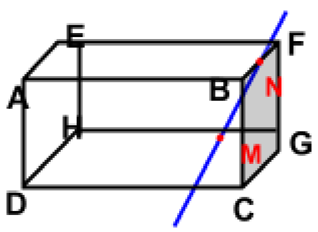
خواص :

(P) مستو و (D) مستقيم من الفضاء .

من أجل كل نقطة A من الفضاء يوجد مستقيم واحد يشمل A ويوازي (D) ؛ ويوجد مستو واحد يشمل A ويوازي (P) .
يكون مستقيم موازيا لمستو إذا وفقط كان موازيا لمستقيم من هذا المستوي .
إذا قطع مستقيم أحد المستويين المتوازيين فإنه يقطع الثاني .
إذا كان مستقيم يوازي أحد المستويين المتوازيين فإنه يكون موازيا للثاني .
إذا قطع مستو أحد المستويين المتوازيين فإنه يقطع الثاني .
المستويان الموازيان لثالث هما متوازيان .
إذا كان مستقيم يوازي مستويين متمايزين ومتقاطعان فإنه يوازي مستقيم تقاطعهما .
إذا كان مستويان متوازيان فإن كل مستو غير موازي لهما يقطعهما في مستقيمين متوازيين .

تمرين : (25 ص 206)

الشكل المقابل هو تمثيل بالمنظور متساوي القياس لمتوازي المستطيلات $ABCDEFGH$.



M نقطة من $[BC]$ و N نقطة من $[BF]$.

أذكر الوضع النسبي مع تبرير الجواب لكل من :

1. المستقيم (MN) والمستوي (BCF) .
2. المستقيم (MN) والمستوي $(ABFE)$.
3. المستقيم (MN) والمستوي $(ADHE)$.
4. المستقيم (MN) والمستقيم (CG) .
5. المستقيم (EB) والمستقيم (HC) .
6. المستوي (NBM) والمستوي (BEH) .
7. المستوي (NBM) والمستوي (AEH) .

الحل :

1. لدينا M نقطة من $[BC]$ و N نقطة من $[BF]$ إذن M و N نقطتان من (BCF) وبالتالي كل نقط المستقيم (MN) تنتمي إلى المستوي (BCF) أي المستوي (BCF) يشمل المستقيم (MN) .
2. بما أن N نقطة من $[BF]$ فإنها تنتمي إلى المستوي $(ABFE)$ ، و M نقطة من $[BC]$ إذن M هي خارج المستوي $(ABFE)$ وبالتالي المستقيم (MN) يقطع المستوي $(ABFE)$ في نقطة وحيدة وهي N .
3. المستويان $(ADHE)$ و (BCF) متوازيان تماما ، و المستوي (BCF) يشمل المستقيم (MN) إذن المستقيم (MN) والمستوي $(ADHE)$ متوازيان تماما .
4. المستقيمات (MN) و (CG) و (BF) من نفس المستوي (BCF) ولدينا المستقيمين (CG) و (BF) متوازيين ، بما أن (MN) يقطع (BF) فإن (MN) يقطع (CG) .
5. المستويان $(ABFE)$ و $(DCGH)$ متوازيان تماما ويشملان المستقيمين (EB) و (HC) على الترتيب إذن المستقيمين (EB) و (HC) متوازيين تماما .
6. المستويان (NBM) و (BEH) متمايزان ولهما نقطة مشتركة إذن هما متقاطعان في مستقيم .
7. المستويان (NBM) و (AEH) متوازيان تماما لأن (NBM) هو $(BCGF)$ و (AEH) هو $(ADHE)$ ومن تعريف متوازي المستطيلات لدينا $(BCGF)$ و $(ADHE)$ مستويين متوازيين .