

Ρυθμοί Μεταβολής

Έστω μ η τιμή ενός φυσικού μεγέθους κάποια χρονική στιγμή t . Αν τη χρονική στιγμή $t+dt$ ($dt \rightarrow 0$), η τιμή του μεγέθους έχει μεταβληθεί σε $\mu + d\mu$ ορίζουμε ως **στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής** του φυσικού μεγέθους μ τη χρονική στιγμή t , το πηλίκο της στοιχειώδους μεταβολής $d\mu$ του μεγέθους προς το αντίστοιχο στοιχειώδες χρονικό

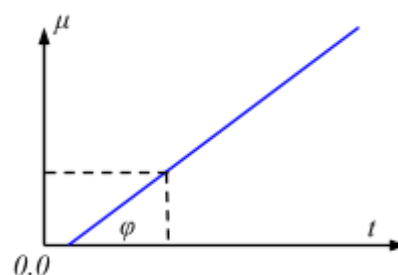
διάστημα dt , δηλαδή:

$$\lambda = \frac{d\mu}{dt}$$

Ο ρυθμός μεταβολής μπορεί, σε κάποιες περιπτώσεις, να εκφράζει ένα άλλο φυσικό μέγεθος, το οποίο θα είναι διανυσματικό ή μονόμετρο ανάλογα με το είδος του μεγέθους μ .

Αν είναι γνωστή η γραφική παράσταση $\mu \rightarrow t$, ο στιγμιαίος ρυθμός λ ισούται με την κλίση της γραφικής παράστασης:

$$\lambda = \frac{d\mu}{dt} = \varepsilon\varphi\varphi = \text{κλίση}$$



Αν το χρονικό διάστημα Δt μέσα στο οποίο υπολογίζεται η μεταβολή $\Delta\mu$ του μεγέθους δεν είναι στοιχειώδες, τότε υπολογίζουμε το **μέσο ρυθμό μεταβολής** από το πηλίκο

$$\bar{\lambda} = \frac{\Delta\mu}{\Delta t}$$

Αν η σχέση $\mu = f(t)$ είναι γραμμική, δηλαδή η γραφική παράσταση $\mu \rightarrow t$, είναι ευθεία, ο **στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής** ισούται με το **μέσο ρυθμό μεταβολής** του φυσικού μεγέθους και είναι **σταθερός**.

Παραδείγματα στιγμιαίων ρυθμών μεταβολής

- 1) Ρυθμός μεταβολής Θέσης(υλικού σημείου), δηλαδή Ταχύτητα**

$$\frac{dx}{dt} = v$$

- 2) Ρυθμός μεταβολής Μήκους τόξου, δηλαδή Γραμμική Ταχύτητα(μέτρο)**

$$\frac{ds}{dt} = v_{\gamma p}$$

- 3) Ρυθμός μεταβολής Γωνίας, δηλαδή Γωνιακή Ταχύτητα(μέτρο)**

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

4) Ρυθμός μεταβολής Ταχύτητας(υλικού σημείου), δηλαδή Επιτάχυνση

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

5) Ρυθμός μεταβολής Γωνιακής Ταχύτητας, δηλαδή Γωνιακή Επιτάχυνση

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}_{γων}$$

6) Ρυθμός μεταβολής Μέτρου Γραμμικής Ταχύτητας(υλικού σημείου), δηλαδή Μέτρο Επιτρόχιας Επιτάχυνσης

$$\frac{d|\vec{v}_{gp}|}{dt} = |\alpha_{επ}|$$

Η επιτρόχια επιτάχυνση είναι διάνυσμα και έχει:

α) διεύθυνση εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά

β) φορά ομόρροπη με την γραμμική ταχύτητα αν η κίνηση

είναι επιταχυνόμενη και αντίρροπη με την γραμμική

ταχύτητα αν η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε μια

κίνηση κυκλική επιταχυνόμενη.

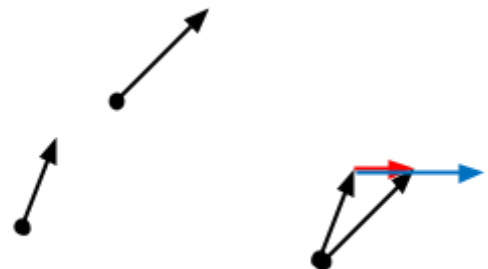


7) Ρυθμός μεταβολής Γραμμικής Ταχύτητας(υλικού σημείου), δηλαδή Επιτάχυνση σε κυκλική κίνηση

$$\frac{d\vec{v}_{gp}}{dt} = \vec{a}$$

Η επιτάχυνση στην κυκλική κίνηση είναι διάνυσμα

και έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $d\vec{v}_{gp}$



8) Ρυθμός μεταβολής Ορμής, δηλαδή Συνισταμένη Δύναμη

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}$$

9) Ρυθμός μεταβολής Στροφορμής, δηλαδή Συνισταμένη Ροπή

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma \vec{\tau}$$

10) Ρυθμός μεταβολής (παραγωγής) Έργου Δύναμης, δηλαδή Ισχύς Δύναμης

$$\frac{dW_F}{dt} = \frac{|\vec{F}| \cdot |d\vec{x}| \cdot \cos\varphi}{dt} = |\vec{F}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi = P_F$$

όπου

$$\varphi = \left(\vec{F}, \vec{v} \right) \text{ γωνία.}$$

11) Ρυθμός μεταβολής (παραγωγής) Έργου Ροπής, δηλαδή Ισχύς Ροπής

$$\frac{dW_{\tau_F}}{dt} = \frac{\tau_F \cdot d\theta}{dt} = \tau_F \cdot \omega = P_{\tau_F}$$

όπου τα σύμβολα τ_F και ω παριστάνουν αλγεβρικές τιμές.

12) Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας, δηλαδή Ισχύς Συνισταμένης Δύναμης

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{|\Sigma \vec{F}| \cdot |d\vec{x}| \cdot \cos\varphi}{dt} = |\Sigma \vec{F}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi = P_{\Sigma F}$$

13) Ρυθμός μεταβολής Στροφικής Κινητικής Ενέργειας, δηλαδή Ισχύς Συνισταμένης Ροπής

$$\frac{dK_{\pi}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma \tau}}{dt} = \frac{\Sigma \tau \cdot d\theta}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega = P_{\Sigma \tau}$$

όπου τα σύμβολα $\Sigma \tau$ και ω παριστάνουν αλγεβρικές τιμές.

14) Ρυθμός μεταβολής Δυναμικής Ενέργειας Βαρύτητας, δηλαδή Ισχύς Βάρους

$$\frac{dU_B}{dt} = -\frac{dW_B}{dt} = -\frac{|\vec{B}| \cdot |d\vec{x}| \cdot \cos\varphi}{dt} = -|\vec{B}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi = -P_B$$

όπου $\varphi = \left(\overset{\text{W}}{B}, \overset{\text{W}}{v} \right)$ γωνία.

- Τι μας λέει η τελευταία περίπτωση για ένα σώμα που κινείται κατακόρυφα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της Γης;

α) Όταν το σώμα ανέρχεται κατακόρυφα

$$\frac{dU_{\beta}}{dt} = -|B| \cdot |v| \cdot \cos 180^\circ = |B| \cdot |v| > 0$$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι **θετικός**, κάτι που το περιμέναμε, αφού η ως προς το έδαφος δυναμική του ενέργεια **αυξάνεται**.

β) Όταν το σώμα κατέρχεται κατακόρυφα

$$\frac{dU_{\beta}}{dt} = -|B| \cdot |v| \cdot \cos 0^\circ = -|B| \cdot |v| < 0$$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι **αρνητικός**, κάτι που το περιμέναμε αφού η ως προς το έδαφος δυναμική του ενέργεια **μειώνεται**.

Σχόλιο

Στην οριζόντια βολή κάθε στιγμή, το μέτρο της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας είναι

$$|v_{\psi}| = |v| \cdot \sin \varphi$$

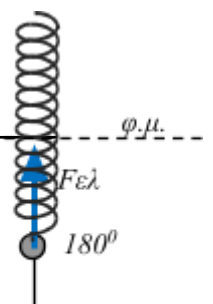
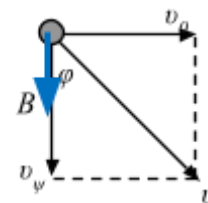
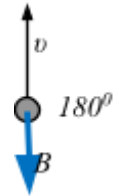
$$\text{Άρα } \frac{dU_{\beta}}{dt} = -|B| \cdot |v| \cdot \sin \varphi = -|B| \cdot |v_{\psi}| < 0$$

ενώ η Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας επιβάλλει

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{dU_{\beta}}{dt} = |B| \cdot |v_{\psi}| > 0$$

15) Ρυθμός μεταβολής Δυναμικής Ενέργειας Ιδανικού Ελατηρίου, δηλαδή Ισχύς Δύναμης Ελατηρίου

$$\frac{dU_{\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{dW_{F\varepsilon\lambda}}{dt} = -\frac{|F_{\varepsilon\lambda}| \cdot |dx| \cdot \cos \varphi}{dt} = -k|x| \cdot |v| \cdot \cos \varphi = -P_{F\varepsilon\lambda}$$



- Τι μας λείπει η τελευταία περίπτωση για ένα σώμα δεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου;

α) Όταν το σώμα απομακρύνεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (όπου $U_{ελ} = 0$)

$$\frac{dU_{ελ}}{dt} = -k|x| \cdot |v| \cdot \cos 180^\circ = k|x| \cdot |v| > 0$$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής

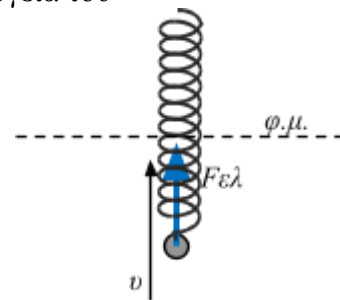
ενέργειας είναι **θετικός**, κάτι που το περιμέναμε αφού η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου **αυξάνεται**.

β) Όταν το σώμα πλησιάζει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (όπου $U_{ελ} = 0$)

$$\frac{dU_{ελ}}{dt} = -k|x| \cdot |v| \cdot \cos 0^\circ = -k|x| \cdot |v| < 0$$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής

της δυναμικής ενέργειας είναι **αρνητικός**, κάτι που το περιμέναμε αφού η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου **μειώνεται**.



16) Ρυθμός μεταβολής(διέλευσης) όγκου ρευστού, δηλαδή Παροχή

$$\frac{dV}{dt} = \Pi$$

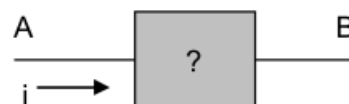
Ρυθμός επαναλήψεων, δηλαδή **Συχνότητα** $\frac{dN}{dt} = f$

18) Ρυθμός μεταβολής(διέλευσης) ηλεκτρικού φορτίου, δηλαδή Ένταση Ηλεκτρικού Ρεύματος

$$\frac{dq}{dt} = i$$

19) Ρυθμός μεταβολής(παραγωγής) ενέργειας ηλεκτρικού ρεύματος σε ηλεκτρικό δίπολο, δηλαδή Ισχύς Ηλεκτρικού Ρεύματος

$$\frac{dW_{ηλ}}{dt} = P_{ηλ}$$



- Αν το ηλεκτρικό δίπολο είναι πηγή, η ισχύς αυτή προσφέρεται στο κύκλωμα και είναι

$$\frac{dW_{\eta\lambda}}{dt} = P_{\eta\lambda} = (V_B - V_A) \cdot i$$

- Αν το ηλεκτρικό δίπολο είναι αντιστάτης, η ισχύς αυτή εκφράζει και το ρυθμό παραγωγής θερμικής ενέργειας, που εκλύεται στο περιβάλλον, δηλαδή

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{|dW_{\eta\lambda}|}{dt} = |P_{\eta\lambda}| = P_{\Theta} = (V_A - V_B) \cdot i$$

Σχόλιο

Όταν η στιγμιαία ισχύς είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου, όπως π.χ. σε μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, δηλαδή

$$P_F = F \cdot v = F \cdot a \cdot t$$

ο μέσος ρυθμός παραγωγής έργου ή μέση ισχύς στο χρονικό διάστημα $0-t_I$

$$\text{είναι } P_{\mu(F)} = 1/2 F \cdot a \cdot t_I$$

δηλαδή το μισό του στιγμιαίου ρυθμού $P_F = F a t_I$ τη στιγμή t_I .

Απόδειξη εύκολη από τη γραφική παράσταση $P-t$ με εμβαδά.

Ανδρέας Ριζόπουλος