

7 класс, 2010 год

1. Точка B лежит на отрезке AC . $AB = 2$, $BC = 1$. Укажите на прямой AB все точки M , для которых $AM + BM = CM$.

2. Найдите значение выражения $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{18 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 20}$.

3. Чтобы пронумеровать книгу, понадобилось 489 цифр. Сколько страниц в книге?

4. Шоколадка «Alpen Gold» представляет собой прямоугольник 3×5 , состоящий из прямоугольных долек. Ваня и Надя по очереди ломают такую шоколадку. За один ход можно делать один прямолинейный разлом по «канавкам» между дольками, сами же дольки ломать нельзя. Ломать можно любую часть шоколадки, полученную в результате предыдущих разломов. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто выиграет, при правильной игре, если первым ходит Ваня?

5. Пусть $S(n)$ – сумма цифр числа n , а $S(S(n))$ – сумма цифр суммы цифр числа n .

а) Существует ли натуральное n , такое, что $n + S(n) = 2000$?

б) Существует ли натуральное n , такое, что $n + S(n) + S(S(n)) = 2000$?

Решения 7 класс, 20010 год

1. Возможны два варианта расположения точки M :

а) Точка M – середина отрезка AB . Тогда $AM = 1$, $BM = 1$, и $AM + BM = 2$, $CM = MB + BC = 2$.

б) Точка M лежит на луче BA так, что $BM = 3$. Тогда $AM = 1$, $BM = 3$ и $AM + BM = 1 + 3 = 4$, а $CM = CA + AM = 3 + 1 = 4$.

2. Ответ: $\frac{9}{20}$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{18 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 20} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{18} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{10-1}{20} = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

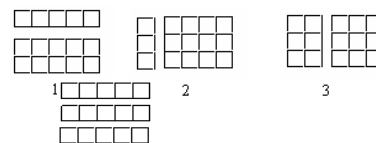
3. Ответ: 199 страниц.

Для нумерации страниц с 1 по 9 требуется 9 цифр, с 10 по 99 требуется $2 \cdot (99 - 9) = 180$ цифр, т.е. для нумерации страниц с 1 по 99 нужно 189 цифр.

Для нумерации трехзначных страниц остается $489 - 189 = 300$ цифр, их хватает на нумерацию $300 : 3 = 100$ страниц. Всего страниц в книге $9 + 90 + 100 = 199$.

4. Ответ: выиграет Надя.

После первого хода Вани возможны 3 ситуации:



В случае 1 Надя делает разлом следующим образом: .



Теперь каждую полоску можно ломать 4 раза и, таким образом, до конца игры будет сделано 12 разломов. Т. к. первый разлом сделает Ваня, то последний ход будет за Надей. В случаях 2 и 3 Надя своим ходом может привести к следующей ситуации:



Теперь если Ваня ломает узкую полоску, то Надя следующим ходом ломает ее еще раз. Если же ход Вани затрагивает одну из широких полосок, то Надя делает аналогичный разлом на другой полоске и т. д. И последний ход все равно будет за Надей.

5. а) Очевидно, число должно быть четырехзначным. Тогда $0 < S(n) \leq 36$, а значит, $1964 \leq n < 2000$. Так как первые две цифры уже определены (их сумма $1 + 9 = 10$), то $10 < S(n) \leq 28$. Следовательно, $1972 \leq n < 1990$.

1) Пусть $n = 1970 + k$ ($2 \leq k \leq 9$).

Тогда $1970 + k + 17 + k = 2000$. Но тогда k не натуральное число.

2) Пусть $n = 1980 + k$ ($0 \leq k \leq 9$).

Тогда $1980 + k + 18 + k = 2000$. Получаем $k = 1$, и $n = 1981$.

б) Так как остаток от деления числа на 3 совпадает с остатком от деления на 3 суммы цифр этого числа, то левая часть равенства кратна трем при любом n .

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть три случая: n кратно 3, n дает остаток 1 при делении на 3, n дает остаток 2 при делении на 3. Но правая часть числа (число 2000) не кратна 3, а значит, нет таких n , при которых выполнялось бы данное равенство.

