

1.- (prueba extraordinaria) Una fábrica produce dos tipos de productos, A y B, que distribuye a tres clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A y 5 de B, el segundo cliente 3 de A y 7 de B, y el tercer cliente 4 de A y 6 de B. En el mes de febrero el primer cliente y el segundo duplicaron las compras del mes anterior, y el tercer cliente compró de cada producto una unidad más de las que compró en enero. En marzo el primer cliente no compró nada, y el segundo y el tercero compraron lo mismo que en febrero.

a) Para cada mes construya la matriz de dimensión 3×2 correspondiente a las compras de ese mes.

Resolución

Sean c_1 , c_2 y c_3 los clientes. Usando el enunciado, las matrices de compras de cada mes son

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \text{ enero: } E = \begin{array}{cc} A & B \end{array} \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \text{ febrero: } F = \begin{array}{cc} A & B \end{array} \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 6 & 14 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \text{ marzo: } M = \begin{array}{cc} A & B \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 14 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Calcule la matriz de compras del trimestre.

Resolución

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \text{ La matriz de compras del trimestre es } T = E + F + M = \begin{array}{cc} A & B \end{array} \begin{pmatrix} 27 & 15 \\ 15 & 35 \\ 14 & 40 \end{pmatrix}$$

c) Si los precios de los productos A y B son, respectivamente, 80 y 100 euros, calcule lo que factura la fábrica en el primer trimestre, por cada cliente y en total.

Resolución

Como la matriz de precios es $P = \begin{array}{cc} A & B \end{array} \begin{pmatrix} 80 & 100 \end{pmatrix}$ realizamos el producto PT

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \text{ } PT = \begin{array}{cc} A & B \end{array} \begin{pmatrix} 80 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cc} c_3 & A & B \end{array} \begin{pmatrix} 27 & 15 \\ 15 & 35 \\ 14 & 40 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \begin{pmatrix} 3660 & 4700 & 3120 \end{pmatrix}$$

La facturación por el primer cliente es de 3660 €, por el segundo 4700 € y por el tercero 3120 €.

La facturación total es $3660 + 4700 + 3120 = 11480$ €

2.- Los alumnos de 2º de Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.

a) Presente en una matriz M, de dimensión 3×2 , las cantidades de los elementos necesarios para la elaboración de un pastel grande y uno pequeño.

Resolución

Nombrando hu = huevos, az = azúcar, ha = harina, g = grandes, p = pequeño y usando el enunciado

$$\begin{array}{c} hu \\ az \\ ha \end{array} M = \begin{array}{cc} g & p \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 100 & 80 \end{pmatrix}$$

b) Si desean fabricar 20 pasteles de una clase y 30 de otra, escriba las dos matrices columna, A (20 grandes y 30 pequeños) y B (30 grandes y 20 pequeños) que representan este reparto.

Resolución Usando el enunciado $A = \begin{array}{c} g \\ p \end{array} \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{array}{c} g \\ p \end{array} \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}$

c) Calcule los productos MA y MB e indique si con 8 docenas de huevos, 200 terrones de azúcar y 5 kg de harina se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños. ¿Y 30 grandes y 20 pequeños?

Resolución

$MA = \begin{matrix} hu \\ az \\ ha \end{matrix} (70 \ 190 \ 4400)$. Esto significa que para hacer 20 pasteles grandes y 30 pequeños hacen falta 70 huevos, 190 terrones de azúcar y 4400 g de harina.

Con 8 docenas (96 huevos), 200 terrones de azúcar y 5 kg (5000 g) de harina tenemos y nos sobra.

$MB = \begin{matrix} hu \\ az \\ ha \end{matrix} (80 \ 210 \ 4600)$. Esto significa que para hacer 30 pasteles grandes y 20 pequeños hacen falta 80 huevos, 210 terrones de azúcar y 4600 g de harina.

Con 8 docenas (96 huevos), 200 terrones de azúcar y 5 kg (5000 g) de harina NO tenemos, nos falta azúcar.

3.- Una empresa vende tres artículos diferentes A, B y C, cada uno de ellos en dos formatos, grande y normal. En la matriz F se indican las cantidades de los tres artículos, en cada uno de los dos formatos, que ha vendido la empresa en un mes. En la matriz G se indican las ganancias, en euros, que obtiene la empresa por cada unidad que ha vendido de cada artículo en cada formato

$$F = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad G = \begin{matrix} & A & B & C \\ \begin{matrix} \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

a) Efectúe los productos $F^t G$ y $F G^t$

Resolución $F^t G = (1400 \ 1800 \ 1100 \ 1900 \ 2450 \ 1500 \ 1040 \ 1340 \ 820)$, $F G^t = (2200 \ 1390 \ 3900 \ 2470)$

b) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas de cada uno de los tres artículos y especifique cuáles son esas ganancias.

Resolución

En la matriz $F^t G$. Los elementos de la diagonal principal representan las ganancias de cada artículo:
 1400 € el artículo A, 2450 el B y 820 € el C

c) Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas en cada uno de los dos formatos, especifique cuáles son esas ganancias y halle la ganancia total.

Resolución

En la matriz $F G^t$. Los elementos de la diagonal principal representan las ganancias de los artículos:
 2200 € de los grandes y 2470 € de los normales

4.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 3 & -1 & b \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de a y b para que se verifique $BC^t = A$

Resolución

$BC^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 & 0 & -1 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -a & 2b & -4 & a & -1 & 3 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Igualando los términos,

$\{2 - a = -12b - 4 = -6a - 1 = 23 - b = 4\}$. De la 1ª y 3ª ecuación, $a = 3$; de la 2ª y 4ª ecuación, $b = -1$. O sea, $a = 3, b = -1$

b) Resuelva la ecuación matricial $AX - A^2 = I_2$.

Resolución

De $AX - A^2 = I$ se tiene $AX = I + A^2$. Como $\det A = 8 \neq 0$, existe A^{-1} y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj} A^t) = \frac{1}{8} \text{adj} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por A^{-1} , por la izquierda, $A^{-1}AX = A^{-1}(I + A^2) \Rightarrow X = A^{-1}(I + A^2)$

$$X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 32 & -12 & 20 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 & -18 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & -42 & 14 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{21}{4} & \frac{7}{4} & \frac{31}{8} \end{pmatrix}$$

5.- Halle la matriz X que verifique la ecuación matricial $A^2X = A - BC$, siendo A, B y C las matrices
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Resolución

Sea $D = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Nos queda $DX = A - BC$. Como $\det D = 4 \neq 0$, existe D^{-1} y

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} (\text{adj} D^t) = \frac{1}{4} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por D^{-1} , por la izquierda, $D^{-1}DX = D^{-1}(A - BC)$, $X = D^{-1}(A - BC)$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & \frac{1}{4} & -2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

6.- (prueba ordinaria) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $AX + A^t = I_2$.

Resolución

De $AX + A^t = I$ se tiene $AX = I - A^t$. Como $\det A = 1 \neq 0$, existe A^{-1} y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj} A^t) = \frac{1}{1} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por A^{-1} , por la izquierda, $A^{-1}AX = A^{-1}(I - A^t)$, $X = A^{-1}(I - A^t)$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

b) ¿Qué requisitos mínimos debe cumplir una matriz B para que pueda efectuarse el producto AB?

Resolución

Como $A_{2 \times 2}$ para que se pueda efectuar AB , la matriz B debe tener 2 filas. Luego, $B_{2 \times n}$.

c) ¿Y para el producto $3BA$?

Resolución

Como siempre se puede multiplicar un escalar por una matriz las condiciones para que se pueda efectuar $3AB$ son las mismas que para BA . Como $A_{2 \times 2}$ para que se pueda efectuar BA , la matriz B debe tener 2 columnas. Luego, $B_{m \times 2}$.