

BANQUE D'EPREUVES ECRIN 1995

SÉRIE M

COMPOSITION DE PHYSIQUE I

Lundi 29 mai 1995 de 8 h à 12 h

On tiendra compte dans la note de l'orthographe et de la présentation jusqu'à - 10 %) ainsi que de la correction du style et de la richesse de la langue.

"L'usage de la calculatrice est autorisé".

Cette épreuve évoque quelques problèmes liés aux ondes sonores. Les questions proposées sont très largement indépendantes compte tenu des résultats intermédiaires donnés dans l'énoncé.

Les sons, les bruits sont liés à des propagations d'ondes de pression dans des milieux élastiques. Sous l'influence d'une contrainte temporaire extérieure, de tels milieux subissent des déformations. On suppose les contraintes suffisamment faibles pour ne pas provoquer de déformations irréversibles des milieux.

I - EQUATION DE PROPAGATION

A - On considère un fluide à l'équilibre relativement à un référentiel R galiléen. En un point M , la pression est P et la densité volumique de forces est notée $f_v \rightarrow$.

* Donner l'équation différentielle locale traduisant l'équilibre du fluide.

B - Relativement à R , le fluide n'est plus à l'équilibre : un élément de fluide dx en M a maintenant une vitesse $v \rightarrow(M,t)$. On note $\rho(M,t)$ la masse volumique en M .

1) On suppose le fluide parfait. Rappeler la signification de ce terme et donner l'équation différentielle en $v \rightarrow$ (équation d'Euler pour les fluides parfaits).

2) On suppose (cas des ondes planes) que $v \rightarrow = v(x,t) \cdot u_x \rightarrow$ avec $u_x \rightarrow$ vecteur unitaire selon l'horizontale, $f_v \rightarrow$ se réduisant aux forces de pesanteur. On suppose que v varie sinusoidalement, de la forme :

$$v(x,t) = V_m \sin\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

On ne s'intéresse par la suite qu'aux mouvements selon Ox .

a) Calculer l'amplitude des différents termes liés à v dans l'équation d'Euler. Montrer que sous réserve d'une condition dont on donnera la signification physique, l'équation précédente se simplifie (**relation [1]**).

b) On considère un élément de fluide correspondant à une section S de fluide compris entre les abscisses x et $x+dx$. Entre les instants t et $t+dt$ sa masse varie par apport de matière aux faces en x et $x + dx$. Donner l'équation différentielle traduisant la conservation de la masse et reliant p et v (**relation [2]**).

c) On pose $P = P_0 + p(x,t)$ et $\rho = \rho_0 + \delta\rho(x,t)$. P_0 et ρ_0 valeurs constantes correspondant à la pression et à la masse volumique à l'équilibre. On se limite par la suite dans toutes les équations au premier terme non nul du développement de chaque membre. Réécrire les relations [1] et [2].

d) On définit pour un fluide, le coefficient de compressibilité isentropique χ_s noté par la suite χ . Montrer que dans le cadre de l'approximation précédente :

$$c = \frac{1}{\rho_0} \frac{(\nabla p / \nabla t)}{(\nabla \rho / \nabla t)} \text{ relation [3]}$$

e) On ne considère que les variables p (surpression acoustique) et v (vitesse vibratoire). Montrer que les équations précédentes conduisent à deux équations aux dérivées partielles en p et v et que, par élimination, on obtient une équation en p ou v de type :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \rho_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

f) Donner sans démonstration la forme générale $f(x,t)$ des solutions de l'équation différentielle précédente comme somme de deux fonctions dont on donnera une interprétation physique. On précisera la célérité c des ondes en fonction de χ et ρ_0 .

II - PROPAGATION DANS UN GAZ

A - Exprimer pour un gaz parfait le coefficient de compressibilité isentropique $\chi_s = \chi$. On notera γ le rapport, supposé constant, des capacités thermiques à pression et à volume constant : $\gamma = C_p / C_v$.

On note M la masse molaire de ce gaz dont la température T est exprimée en Kelvin.

* Montrer que la célérité c du son dans ce gaz est égale à $\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$.

* Calculer la vitesse de propagation du son dans l'air à 15°C. On donne: $R = 8,32 \text{ J.K}^{-1}$, et pour l'air, $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ et $\gamma = 1,4$.

B - Par la suite tous les gaz seront considérés comme parfaits.

1) On lâche dans un puits un objet massif de masse $m = 500 \text{ g}$ à l'instant $t = 0$. Les frottements peuvent être négligés. On entend le bruit de l'impact sur l'eau à l'instant $t_0 = 2 \text{ s}$. En considérant que la température est uniforme et égale à 15°C, donner la profondeur du puits.

2) Sur de plus grande distance, la température peut varier. Ainsi dans l'atmosphère selon la verticale, $T = T_0 - \alpha z$ avec $T_0 = 288 \text{ K}$ et $\alpha = 6,55 \text{ K/km}$. (L'axe Oz est dirigé suivant la verticale ascendante).

* Une explosion se produit à l'altitude $h = 8 \text{ km}$ à l'instant $t = 0$. A quelle instant perçoit-on cette explosion à la verticale, en $z = 0$?

III - INTENSITE D'UN SON. ECHELLE D'INTENSITE

Dans la suite du problème, on notera $\langle x \rangle$ la valeur moyenne de la grandeur $x(t)$ sur la période T .

On se limite aux ondes planes sinusoïdales progressives pour lesquelles la surpression acoustique est :

$$p_+(x, t) = P_m^+ \sin w \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad p_-(x, t) = P_m^- \sin w \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

1) Exprimer v_+ et v_- et préciser quelle est l'onde progressive dans le sens des x croissants.

2) On appelle pression acoustique p_e , la racine carrée de la valeur moyenne de p^2 sur

une période $T = 2\pi/\omega$, $p_e = \langle p^2 \rangle^{1/2}$.

On définirait de même v_e avec la grandeur $v(x,t)$.

* Exprimer pour l'onde progressive sinusoïdale vers les x croissants, p_e et v_e en fonction de P_m^+ , ρ_0 et c .

3) On considère une surface S perpendiculaire à Ox . Quelle est, à l'abscisse x , la puissance de la force de surpression. Donner la valeur moyenne P de cette puissance en fonction de S , p_e , ρ_0 et c (pour une onde progressive vers les x croissants).

* Pour de l'air à 15°C sous une pression de 1 bar = 10^5 Pa , calculer ρ_0 et la pression acoustique p_e correspondant à une puissance par unité de surface $I_0 = 10^{-12} \text{ W / m}^2$.

4) Le seuil d'audibilité de l'oreille moyenne correspond à I_0 pour des sons de fréquence 1000 Hz. L'échelle d'intensité sonore S.I.L (sound intensity level) en décibel (dB) est définie par la relation :

$$L_1 = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (\text{logarithme décimal})$$

* Exprimer L_1 en fonction des surpressions acoustiques.

5) On considère une source ponctuelle O émettant de façon isotrope dans tout l'espace. On admet que, à la distance r de O, localement, l'onde a une structure d'onde plane avec la même relation entre p et v et que l'élément de surface dS est traversé par la puissance $dP = \langle p \cdot v \rangle dS$. On appellera par la suite intensité I de la source sonore O, la puissance émise par unité de surface.

* En exprimant la puissance traversant une sphère de rayon r, donner la relation entre P et I.

* On suppose que la propagation, dans l'air, se fait sans absorption : la puissance transportée par l'onde est constante. Exprimer alors la dépendance en r de p_e et v_e .

6) Application

a) Le seuil de douleur est fixé dans l'échelle S.I.L à 120 dB. Quelle est l'intensité correspondante ? Cela correspond à un réacteur d'avion à 20 m. Quelle est la puissance émise dans tout l'espace par l'avion ?

b) Une voiture passant à 10 m produit un niveau sonore de 50 dB. Une mobylette mal réglée produit à la même distance un niveau sonore de 90 dB. Combien faut-il d'automobiles pour égaler ce bruit ?

c) Pour une source donnée on double la distance à la source. Quelle est en dB la diminution d'intensité sonore ?

7) Au lieu de considérer une source ponctuelle, on envisage un ensemble de sources ponctuelles réparties uniformément sur un axe, on a alors des ondes cylindriques, le son se propageant radialement. En exprimant de la même façon qu'au 5) que la puissance pour une longueur d'axe donnée se répartit sur une surface particulière qu'on précisera, donner une expression de p_e en fonction de la distance r à l'axe.

* Si on double la distance à l'axe, quelle est en dB la diminution d'intensité ?

IV - PROPAGATION AVEC ATTENUATION

1) Une source ponctuelle en O, de puissance P_0 émet dans tout l'espace de façon isotrope. L'air absorbe une fraction de la puissance de l'onde sonore émise. On suppose qu'une couche d'air comprise entre les sphères de rayon r et $r + dr$ absorbe la puissance $B \cdot P \cdot dr$ en notant P la puissance reçue par la sphère de rayon r. Donner l'expression de la puissance $P(r)$ et de l'intensité $I(r)$ perçue à la distance r de O. On notera $P_0 = P(0)$.

2) Application : on s'éloigne d'une source O de $r_1 = 10$ m à $r_2 = 10010$ m. Quel est en dB, l'affaiblissement sonore ? On donne pour un son de fréquence $\nu = 1000$ Hz $B = 1,162 \text{ km}^{-1}$.

3) Du fait de la viscosité de l'air, l'affaiblissement dépend en fait de la fréquence ν des sons émis. Ainsi $B = \alpha \nu^2 + \beta \nu$. Les coefficients α et β sont liés à l'air et dépendent de sa température et de son degré hygrométrique. Pour de l'air à 15°C avec un coefficient hygrométrique de 0,5 : $\alpha = 3,349 \cdot 10^{-11} \text{ Hz}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\beta = 11,29 \cdot 10^7 \text{ Hz}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. On se trouve en $r_1 = 10$ m. A quelle valeur r_2 y-a-t'il affaiblissement de 120 dB pour un son grave ($\nu = 100$ Hz), pour un son aigu ($\nu = 10$ kHz) ? Conclusion.

V - REFLEXION ET TRANSMISSION

On revient au cas des ondes sonores planes progressives sinusoïdales de pulsation ω se propageant sans atténuation dans un milieu (fluide ou solide) avec la célérité c dans la direction quelconque $\vec{u}$. Par analogie avec l'optique on appellera rayon sonore la direction de $\vec{u}$. On pose $\vec{k} = (\omega/c) \cdot \vec{u}$.

Les plans d'onde sont des plans perpendiculaires à la direction de propagation et à un instant donné, tous les points d'un plan d'onde ont même valeur de p surpression acoustique et v vitesse vibratoire.

On associe à la grandeur sinusoïdale réelle $y = Y_m \sin(\omega t + \phi)$ la grandeur complexe $\underline{y} = Y_m e^{i\phi} e^{i\omega t}$ avec $i^2 = -1$. On appellera ainsi amplitude complexe associée à y la grandeur $\underline{Y} = Y_m e^{i\phi}$.

1) Exprimer l'amplitude complexe p_e de la surpression acoustique en un point M repéré par $OM \vec{=} r \vec{}$. On supposera que l'onde plane sinusoïdale de surpression est telle que à $t = 0$ l'amplitude complexe de la surpression acoustique est p_0 en O ($r \vec{=} 0$). Par la suite une telle onde sera notée $[p_0, \omega, r \vec{}]$.

2) On considère deux milieux [1] et [2] (célérités c_1 et c_2 , masses volumiques à l'équilibre ρ_1 et ρ_2), séparés par le plan xOy.

Une onde sonore plane sinusoïdale incidente $[p_0^i, \omega_i, k_i \vec{}]$ est, à la surface xOy de séparation des deux milieux [1] et [2], partiellement réfléchiée $[p_0^r, \omega_r, k_r \vec{}]$ et partiellement transmise $[p_0^t, \omega_t, k_t \vec{}]$.

On note α_i , α_r et α_t , les angles arithmétiques de $k_i \vec{}$, $k_r \vec{}$ et $k_t \vec{}$ avec la normale Oz à la surface de séparation. (notés après a) α_1 et α_2).

a) Montrer que la continuité de la surpression acoustique à la surface de séparation conduit à $\omega_i = \omega_r = \omega_t$, à une relation simple entre α_i et α_r d'une part, entre α_i et α_t d'autre part et à une relation entre p_0^i , p_0^r et p_0^t .

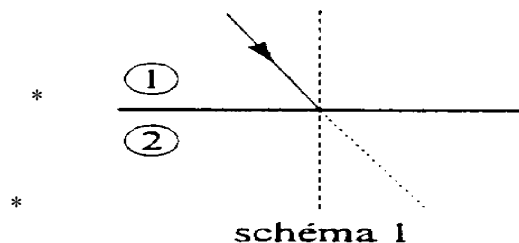
b) De même montrer que la continuité des composantes normales de vitesse vibratoire conduit à une autre relation entre p_0^i , p_0^r et p_0^t .

c) On pose $r_p = p_0^r / p_0^i$, coefficient de réflexion de surpression et $t_p = p_0^t / p_0^i$, coefficient de transmission de surpression.

Exprimer r_p et t_p en fonction de ρ_1 , ρ_2 , c_1 , c_2 , α_1 et α_2 .

3) Application: Comparaison des réfractions pour des ondes sonores et des ondes lumineuses avec les données:

Onde sonore	air	$c_1 = 340 \text{ m/s}$
	eau	$c_2 = 1450 \text{ m/s}$
Onde lumineuse	air	indice $n_1 = 1,00$
	eau	indice $n_2 = 1,33$



Compléter les schémas pour le rayon transmis comparant la réfraction d'un rayon sonore (schéma 1) et d'un rayon lumineux (schéma 2).

Montrer qu'il existe un angle α_{lim} pour des ondes sonore dans l'air incidentes sur de l'eau. Donner la valeur numérique de cet angle. Que se

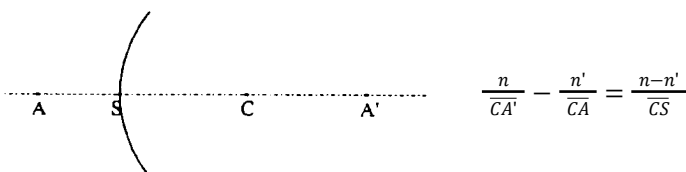
passé-t-il si $\alpha_i > \alpha_{\text{lim}}$?

4) Le phénomène de réflexion est à l'origine du phénomène d'écho : une onde sonore émise par un expérimentateur se réfléchit sur une surface et revient à l'expérimentateur. Ce phénomène dépend du son émis et du pouvoir séparateur de l'oreille.

On admet qu'un phénomène d'écho apparaît quand le retard entre le son direct et le son réfléchi est au moins de 50 ms.

* Quelle est la distance minimale observateur- paroi pour qu'un écho puisse être observé ?

5) Qu'appelle-t-on approximation de Gauss en optique ? On donne la formule de conjugaison du dioptré sphérique avec origine au centre entre le point objet A sur l'axe dans le milieu d'indice n et le point image A' dans le milieu d'indice n' .



A la Cité des Sciences, on peut observer un ballon sphérique de centre O et de rayon $R = 1 \text{ m}$ réalisé avec du plastique mince et rempli de dioxyde de carbone. On donne la célérité des ondes dans l'air ($c_1 = 340 \text{ m/s}$) et dans le dioxyde de carbone ($c_2 = 270 \text{ m/s}$). Une source sonore est placée en A avec $OA = a$.

* Montrer par analogie avec l'optique que l'ensemble forme une image A' de A. Pour quelle valeur de a a-t-on $OA' = a$?

6) On considère une onde sonore plane sinusoïdale arrivant normalement sur le plan xOy séparant le milieu [I] du milieu [2]. On rappelle que les coefficients de réflexion et de transmission en surpression sont dans ce cas :

$$r_p = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \quad t_p = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$$

On définit les coefficients de réflexion $R_I = I_r / I_i$ et de transmission $T_I = I_t / I_i$ en intensité, avec $I = \langle p.v \rangle$.

a) Donner la relation entre r_p et R_I , entre t_p et T_I

b) Calculer en dB l'affaiblissement d'intensité d'une onde sonore en incidence normale dû au changement de milieu, après traversée d'un mur de béton, d'un double vitrage en verre. (Pour simplifier l'air entre les deux vitres sera pris dans les mêmes conditions que l'air extérieur).

Air	$c_1 = 340 \text{ m/s}$	$\rho_1 = 1,25 \text{ kg/m}^3$
Béton	$c_2 = 4000 \text{ m/s}$	$\rho_2 = 2000 \text{ kg/m}^3$
Verre	$c_2' = 5000 \text{ m/s}$	$\rho_2' = 2200 \text{ kg/m}^3$

VI - ETABLISSEMENT ET EXTINCTION D'UN SON DANS UNE SALLE

On imagine qu'à l'instant $t = 0$ une source de puissance constante P rayonne de façon isotrope dans une salle. On appelle $E(t)$ la densité volumique d'énergie (énergie par unité de volume). On note V le volume total de la salle.

Une partie de l'énergie émise par la source est absorbée par les parois. On note adt la fraction d'énergie absorbée pendant le temps dt .

1) En faisant un bilan énergétique de l'énergie dans la salle entre les instants t et $t+dt$, donner l'équation différentielle en $E(t)$.

2) En posant $T=V/a$, donner $E(t)$ si $P(t)$ est nul pour $t < 0$ et $t > t_i$, et $P(t) = P$ constante pour $0 < t < t_i$. On tracera $E = E(t)$ dans le cas $\tau \ll t_i$.

VII- INTERFERENCES SONORES

Le son est un phénomène ondulatoire et comme tel peut donner naissance à des phénomènes d'interférences.

On considère n sources considérées comme ponctuelles ($S_0 \dots S_{n-1}$), par exemple n haut-parleurs identiques, de même puissance émettant en phase.

On se place à grande distance des sources. On peut ainsi considérer que les ondes sonores émises par chaque source sont des ondes planes, sinusoïdales, comme définies à la question V.

Chaque source est distante de ses voisines de a . Les sources sont selon l'axe Oy positif, la source S_0 se trouvant en O. On note c la célérité de ces ondes dans l'air.

1) Exprimer, pour une direction θ par rapport à Ox des rayons, le déphasage entre deux rayons successifs. Pour simplifier les écritures, on posera :

$$j = \frac{aw}{c} \sin \theta$$

2) Donner l'amplitude complexe de la surpression acoustique due à la source S_1 en fonction de l'amplitude complexe p_0 de la surpression due à la source S_0 .

3) En déduire l'amplitude complexe de la surpression acoustique résultante "à l'infini", puis l'intensité résultante $I(\theta)$. On notera $I_0 = I(0)$.

4) Conséquence : à quelle condition n'entend-on pas de son dans la direction θ ? La première extinction est-elle toujours possible ? Montrer qu'il existe une fréquence limite ν_c .

5) On choisit $n = 5$ et $a = 0,2$ m Calculer v_c . Représenter sommairement l'intensité $I(\theta)$ dans les cas $v < v_c$, $v = v_c$ et $v > v_c$.
