

Les quadripôles

De nombreux circuits peuvent être représentés par une « boîte » munie de deux bornes d'entrée et de deux bornes de sortie, que l'on nomme **quadripôle**.

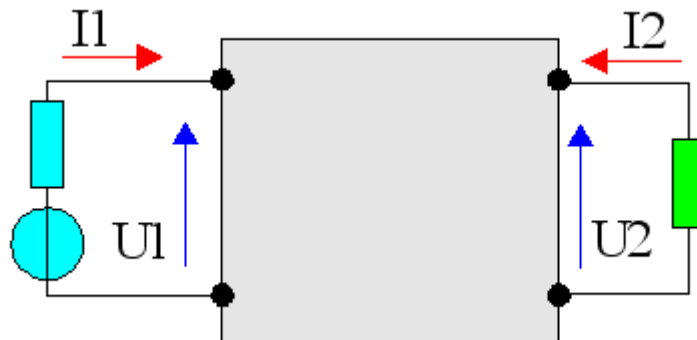


Figure 1

Il est souvent possible de décomposer un dispositif électrique ou électronique complexe en un ensemble de modules fonctionnels qui sont des quadripôles. Ces modules sont ensuite associés en cascade : les grandeurs de sortie de l'un constituent les grandeurs d'entrée du suivant.

Remarque

L'étude des quadripôles linéaires est facilitée par l'usage du calcul matriciel. Cette représentation des circuits est également bien adaptée aux méthodes de calcul numérique modernes.

CAS PARTICULIER : Le tripôle

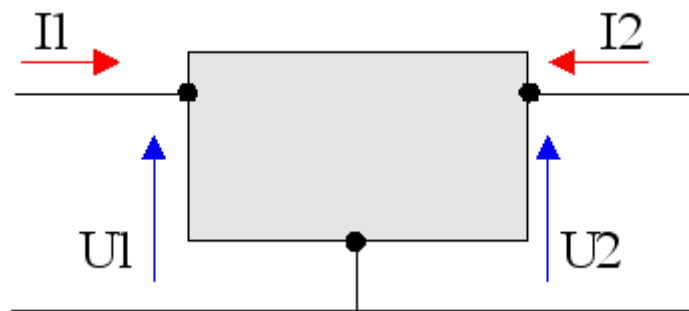


Figure 2

Une borne d'entrée est alors commune avec une borne de sortie. Les transistors sont modélisables par des tripôles.

Quadripôle série

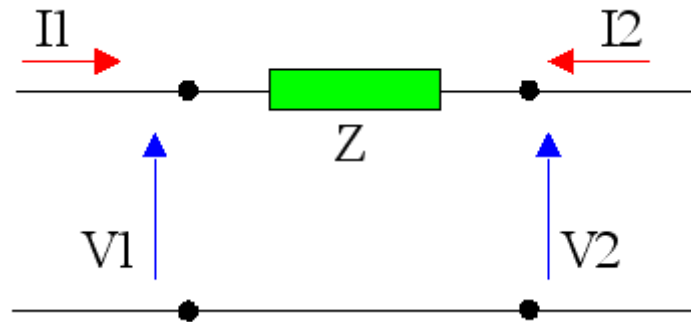


Figure 3

Il contient une seule impédance. La loi des mailles donne : $V_2 = V_1 - Z \cdot I_1$ et $I_2 = -I_1$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

Remarque

Pour ce quadripôle, le déterminant de la matrice liant les grandeurs d'entrée aux grandeurs de sortie est égal à 1.

Quadripôle parallèle

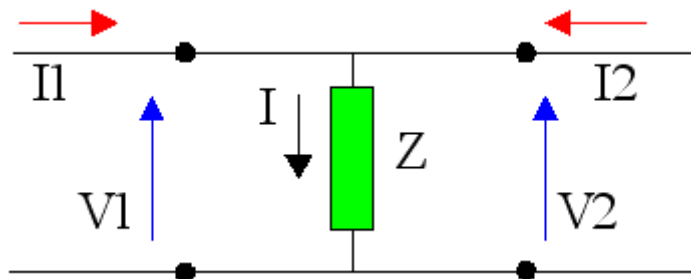


Figure 4

$$V_2 = V_1$$

$$I_1 + I_2 = I$$

$$I_2 = V_1/Z - I_1$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

Ici encore, le déterminant de la matrice est égal à 1.

Transformateur idéal en régime sinusoïdal

On néglige toutes les pertes (résistives et dues aux courants de Foucault).

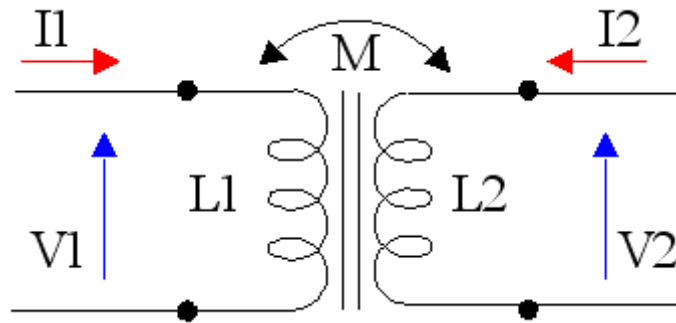


Figure 5

$$\begin{aligned}
 V_1 &= L_1 \cdot dI_1/dt + M \cdot dI_2/dt \\
 V_2 &= M \cdot dI_1/dt + L_2 \cdot dI_2/dt \\
 V_1 &= jL_1 \cdot \omega \cdot I_1 + jM \cdot \omega \cdot I_2 \\
 V_2 &= jM \cdot \omega \cdot I_1 + jL_2 \cdot \omega \cdot I_2 \\
 \begin{bmatrix} V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} &= j\omega \cdot \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

On admet que les inductances sont des solénoïdes de section S ayant N_1 et N_2 spires, des longueurs ℓ_1 et ℓ_2 et que les pertes sont négligeables. Si Φ_1 est le flux d'induction à travers l'enroulement primaire, on a :

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2 = N_1 B_1 S + N_1 B_2 S$$

$$B_1 = \frac{\mu N_1 I_1}{\ell}; B_2 = \frac{\mu N_2 I_2}{\ell}$$

$$L_1 = \frac{\mu S N_1^2}{\ell};$$

$$M = \frac{\mu S N_1 N_2}{\ell}; \Rightarrow L_1 = k \cdot N_1^2 \quad M = k \cdot N_1 N_2 = \sqrt{L_1 L_2}$$

Avec ces hypothèses, on obtient en régime sinusoïdal :

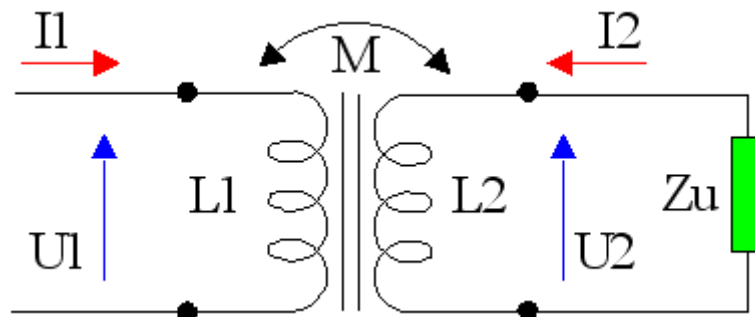


Figure 6

$$\begin{aligned}
 V_1 &= jL_1 \cdot \omega \cdot I_1 + jM \cdot \omega \cdot I_2 \\
 V_2 &= jM \cdot \omega \cdot I_1 + jL_2 \cdot \omega \cdot I_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = j\omega \cdot \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

A partir de l'expression de la matrice $\mathbf{Z}$ du transformateur, on détermine l'expression de l'impédance vue à l'entrée quand le transformateur est chargé par une impédance Z_u .

$$Z_E = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_u} = jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{jL_2\omega + Z_u}$$

$$Z_E = \frac{jL_1\omega Z_u}{Z_u + jL_2\omega}$$

Soit :

Cette impédance est équivalente à une impédance $Z_u \cdot L_1/L_2$ en parallèle avec une impédance $jL_1\omega$. Si le produit $L_1\omega$ est assez grand, l'impédance présentée par le transformateur chargé est donc

$$Z_u \cdot L_1/L_2 = Z_u \cdot (N_1/N_2)^2. \quad (n = N_1/N_2 \text{ est le rapport de transformation}).$$

Le transformateur permet donc l'adaptation en puissance des impédances entre une source d'impédance Z_s et une charge d'impédance Z_u . Il suffit d'utiliser un transformateur de rapport $n^2 = Z_s/Z_u$.

Remarque

Comme on néglige les pertes, ce quadripôle *passif* possède un gain en puissance égal à 1. Le gain en tension peut être supérieur ou inférieur à 1 (transformateur élévateur ou abaisseur de tension).

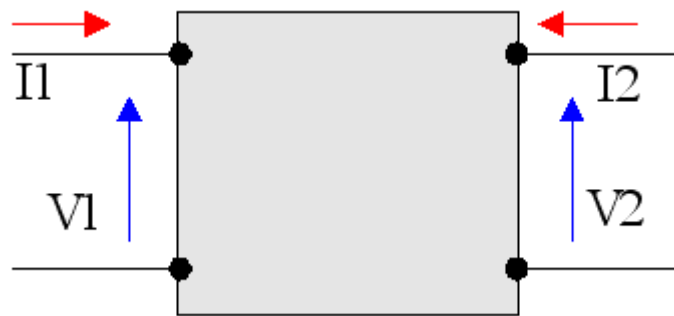


Figure 7

Pour les quadripôles ne contenant que des dipôles linéaires les 4 grandeurs fondamentales V_1, V_2, I_1 et I_2 sont liées par des équations linéaires.

Plusieurs représentations matricielles sont possibles et le choix de l'une de celles-ci sera fait en fonction du problème étudié.

Matrice impédance

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

On exprime les tensions en fonction des courants. Les éléments de la matrice ont la dimension d'impédances.

Matrice admittance

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

On exprime les courants en fonction des tensions. Les éléments de la matrice ont la dimension d'admittances.

Matrice de transfert

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

On exprime les grandeurs de sortie en fonction des grandeurs d'entrée. T_{11} est un nombre, T_{12} est une impédance, T_{21} une admittance et T_{22} un nombre.

Rappel

Bien noter dans cette représentation le *signe moins* affecté à I_1 .

La matrice inverse de la matrice de transfert donne les paramètres d'entrée en fonction des paramètres de sortie.

Matrice hybride

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

L'intérêt de cette représentation apparaît lors de l'étude des transistors.

H_{11} est une impédance, H_{12} est un nombre, H_{21} un nombre et H_{22} une admittance. On utilise parfois la matrice $[G] = [H]^{-1}$.

Les relations étant linéaires, il est facile de déduire les coefficients d'une représentation à partir de ceux d'une autre.

Caractéristiques des quadripôles passifs

Ce sont les réseaux de courbes qui représentent les variations des tensions en fonction des courants. Par exemple, pour le réseau $V_1 = g(I_1)$, on prendra I_2 ou V_2 comme paramètre : chaque courbe de ce réseau est tracée pour une valeur donnée et constante de I_2 (ou de V_2).

Propriété des quadripôles passifs

Soit un quadripôle *passif* dont la tension d'entrée est E et le courant de court-circuit en sortie est I_S . D'après le théorème de réciprocité, le courant dans l'entrée en court-circuit est $I_E = I_S$ si la tension de sortie est E .



Figure 8

Les relations entrée $\Leftrightarrow$ sortie pour la matrice de transfert s'écrivent :

$$V_2 = T_{11} V_1 - T_{12} I_1$$

$$I_2 = T_{21} V_1 - T_{22} I_1$$

Sortie en court-circuit :

$$0 = T_{11} E - T_{12} I_1$$

$$I_S = T_{21} E - T_{22} I_1$$

Entrée en court-circuit :

$$E = 0 - T_{12} I_E$$

$$I_2 = 0 - T_{22} I_E$$

L'égalité $I_E = I_S$ implique que : $\Delta(T) = T_{11} \cdot T_{22} - T_{12} \cdot T_{21} = 1$.

Des calculs analogues montrent que pour un quadripôle *passif* on a aussi :

$$Z_{21} = Z_{12} \text{ et } H_{21} = -H_{12}$$